Lekcija 4: *Robusna stabilnost i analiza performansi MIMO sistema*

Prof.dr.sc. Jasmin Velagić
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Kolegij: Multivarijabilni sistemi

2012/2013

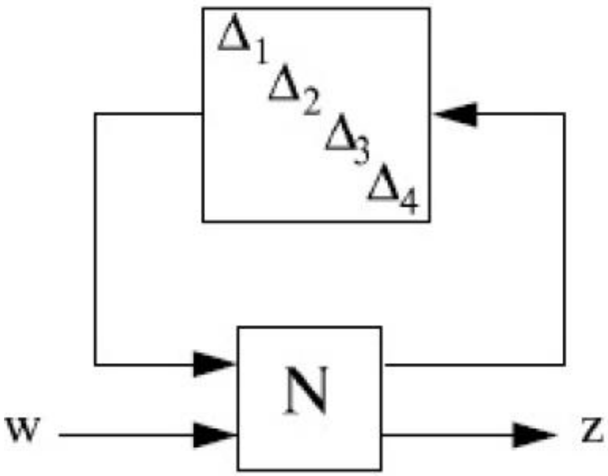
Robusnost sistema i robusna performansa

- **Cilj: prikaz metoda za analizu robusne stabilnosti i robusne performanse MIMO sistema sa višestrukim perturbacijama.**
- Predstavljanje neizvjesnosti složenim perturbacijama u MIMO sistemu zahtijeva **matrice peturbacije** $\Delta(s)$, koje često imaju restriktivnu strukturu, tj. nisu pune matrice.
- Za analizu navedenih problema koristi se **strukturirana singularna vrijednost** (μ) i RS problem sa strukturiranim perturbacija ne može se riješiti H_∞ analizom.
- Fokus je na sintezi "optimalnog" robusnog regulatora, u smislu minimizacije μ, korištenjem **DK-iteracije**.
- RP problem može se promatrati kao RS problem sa strukturiranom neizvjesnošću.

Upravljačka konfiguracija s neizvjesnostima

Opća upravljačka konfiguracija s neizvjesnošću

- Prikaz neizvjesnih perturbacija u blok-dijagonalnoj matrici:

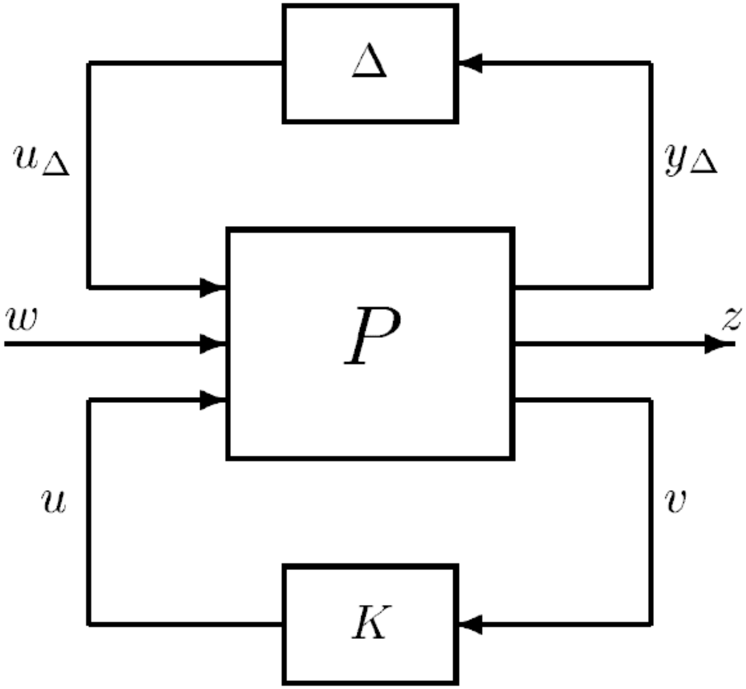


$$\Delta = \mathrm{diag}\{\Delta_i\} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \Delta_i & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

- gdje Δ_i predstavlja specifični izvor neizvjesnosti, npr. ulaznu neizvjesnost.
- Ako $\|\Delta_i\|_\infty \leq 1$ onda je $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, što slijedi iz činjenice da su singularne vrijednosti blok-dijagonalnih matrica jednake singularnim vrijednostima blokova.

Upravljačka konfiguracija s neizvjesnostima

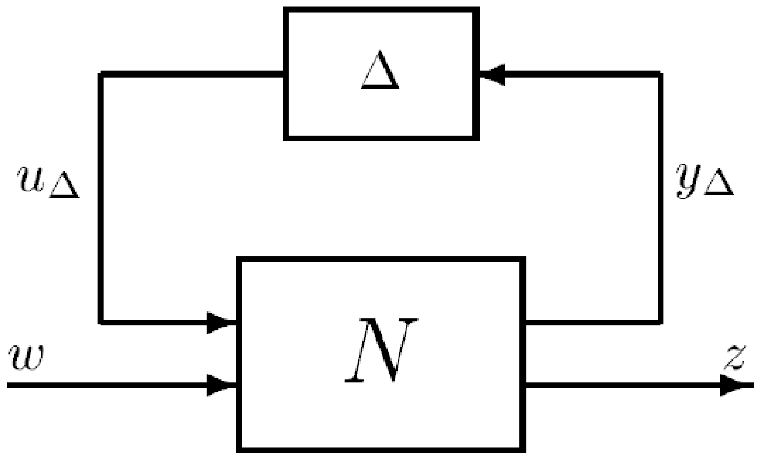
Konfiguracija za sintezu regulatora *K*



- Blok-dijagonalna matrica $\Delta(s)$ uključuje sve moguće perturbacije (predstavljaju neizvjesnosti) sistema, normirane tako da je $\|\Delta_i\|_\infty \leq 1$.
- **Cilj vezan za performanse**: minimizirati efekt $\boldsymbol{w}$ na $\boldsymbol{z}$.

Upravljačka konfiguracija s neizvjesnostima

$N\Delta$ - struktura za analizu RP



- $\boldsymbol{N}$ je povezan sa $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{K}$ pomoću donje LFT (Linear Fractional Transformation) od $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{K}) = \boldsymbol{P}_{11} + \boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{22}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{P}_{21}$$

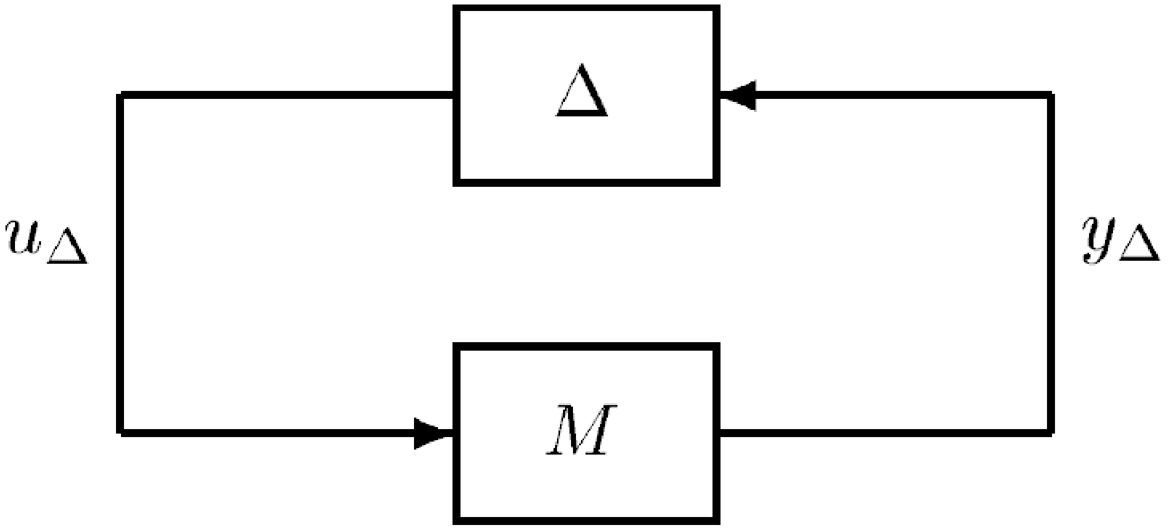
- Neizvjesnost funkcije prijenosa od $\boldsymbol{w}$ do $\boldsymbol{z}$ dana je pomoću gornje LFT od $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_u(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{\Delta}) = \boldsymbol{N}_{22} + \boldsymbol{N}_{21}\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{\Delta})^{-1}\boldsymbol{N}_{12}$$

Upravljačka konfiguracija s neizvjesnostima

$M\Delta$-struktura za analizu RS

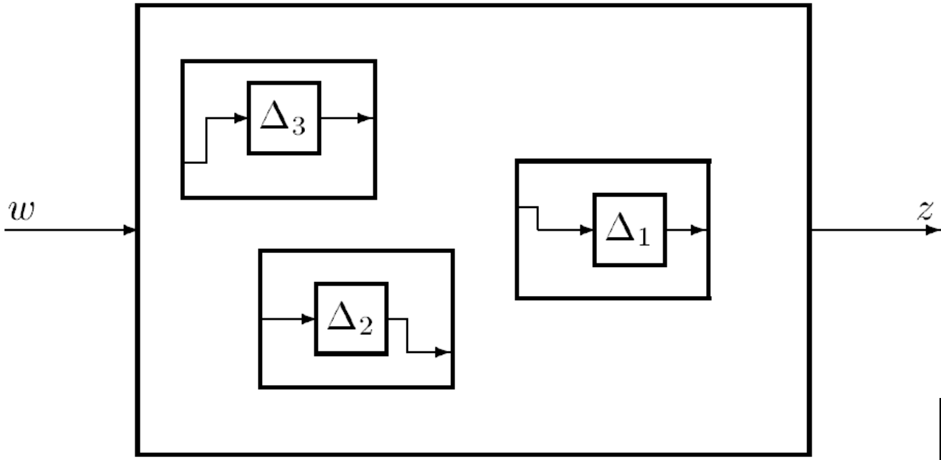
- Za analizu robusne stabilnosti promatra se samo struktura na sljedećoj slici.

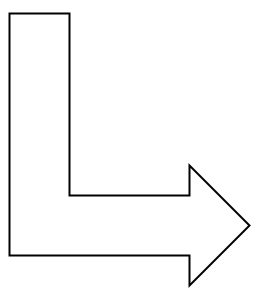


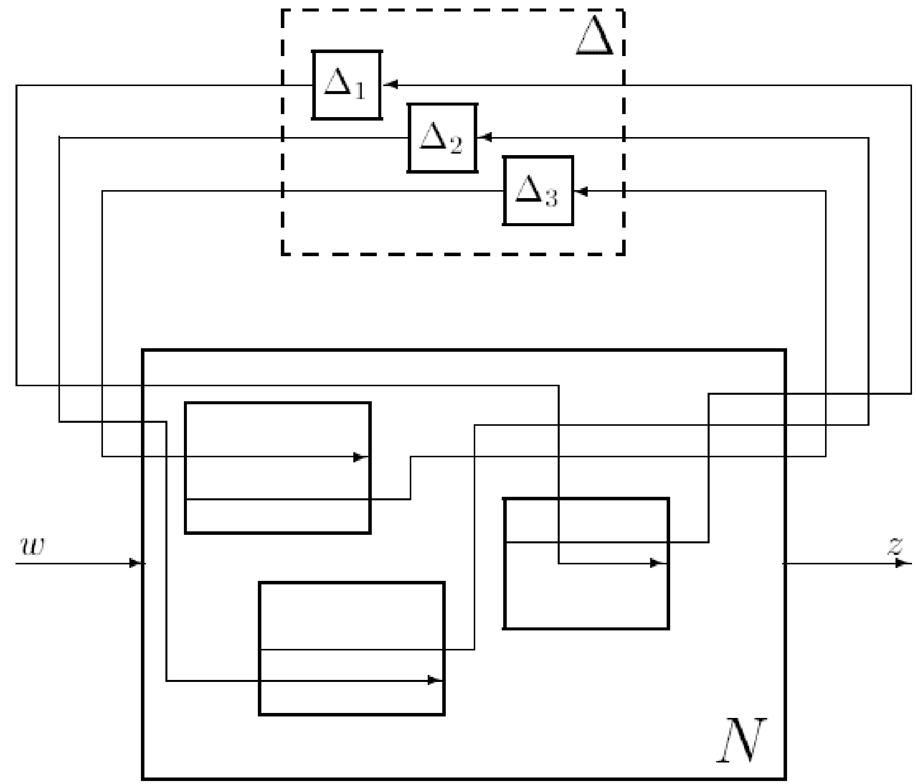
- $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}_{11}$ – funkcija prijenosa od izlaza prema ulazu perturbacija.

Upravljačka konfiguracija s neizvjesnostima

- Sistem sa višestrukim perturbacijama



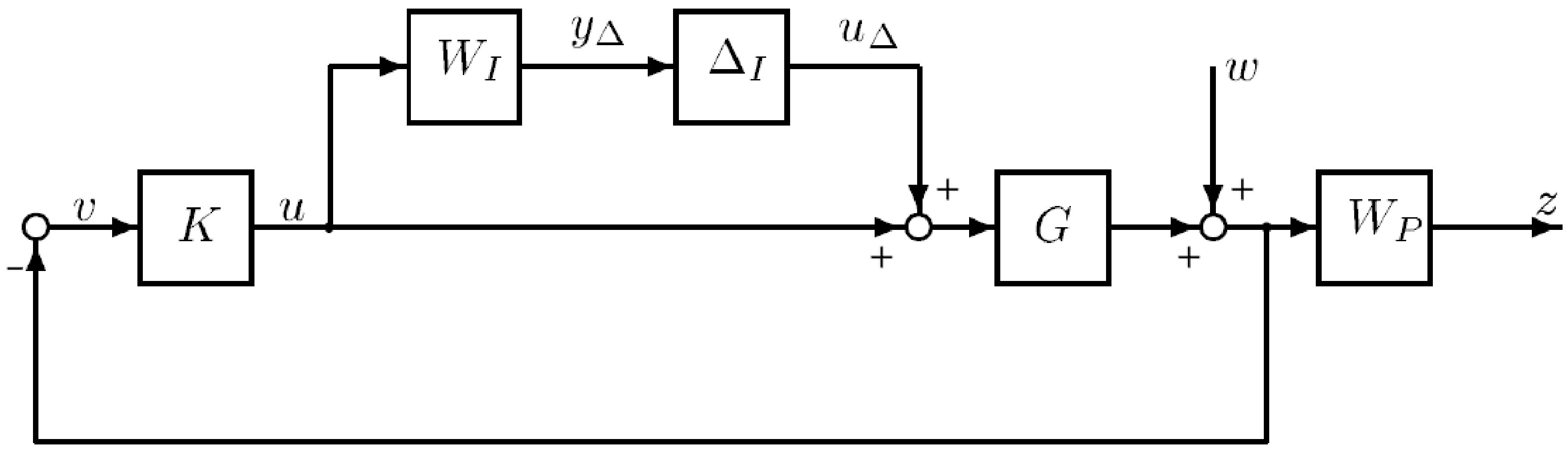




Reformuliran sistem u $N\Delta$-strukturi

Upravljačka konfiguracija s neizvjesnostima

- **Primjer 1**. Računanje $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N}$ i $\boldsymbol{M}$ matrica. Promatramo sistem s multiplikativnom ulaznom neizvjesnošću Δ_I. Matrice $\boldsymbol{W}_I$ i $\boldsymbol{W}_P$ predstavljaju normiranu težinu za neizvjesnost i težinu performansi, respektivno.
- Potrebno je odrediti generaliziran proces $\boldsymbol{P}$ koji ima sljedeće ulaze i izlaze: $[\boldsymbol{u}_\Delta \quad \boldsymbol{w} \quad \boldsymbol{u}]^T$ i $[\boldsymbol{y}_\Delta \quad \boldsymbol{z} \quad \boldsymbol{v}]^T$



Upravljačka konfiguracija s neizvjesnostima

- Na temelju prethodne slike slijedi:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{\Delta} \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{W}_I \\ \boldsymbol{W}_P\boldsymbol{G} & \boldsymbol{W}_P & \boldsymbol{W}_P\boldsymbol{G} \\ -\boldsymbol{G} & -\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{G} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{P}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{\Delta} \\ \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}$$

- Matrica $\boldsymbol{N}$ računa se prema izrazu:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{F}_I(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{P}_{11} + \boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{22}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{P}_{21}$$

sa:

$$\boldsymbol{P}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{W}_P\boldsymbol{G} & \boldsymbol{W}_P \end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}_{12} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_I \\ \boldsymbol{W}_P\boldsymbol{G} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}_{21} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{G} & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}_{22} = -\boldsymbol{G}$$

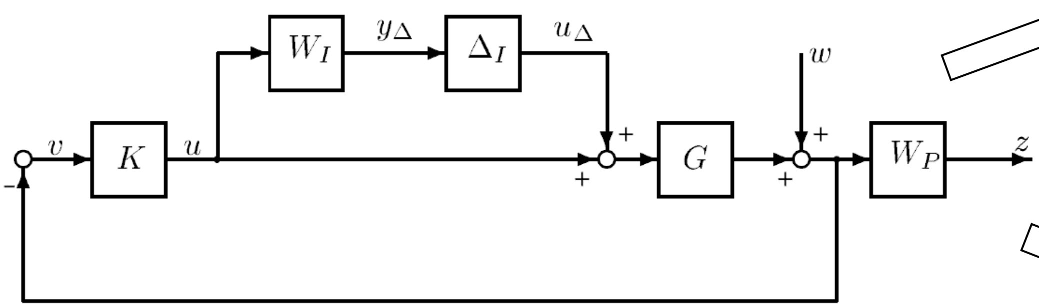
Upravljačka konfiguracija s neizvjesnostima

- Slijedi da je matrica $\boldsymbol{N}$:

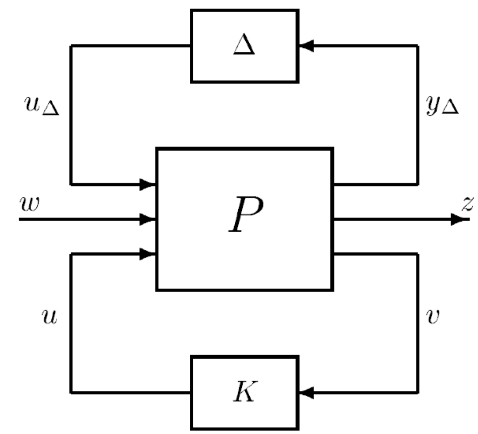
$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{W}_I \boldsymbol{K}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{G})^{-1} & -\boldsymbol{W}_I \boldsymbol{K}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{K})^{-1} \\ \boldsymbol{W}_P \boldsymbol{G}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{G})^{-1} & \boldsymbol{W}_P (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{K})^{-1} \end{bmatrix}$$

- Matrica $\boldsymbol{M}$ jednaka je:

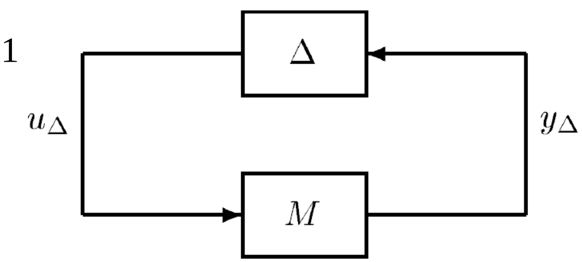
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}_{11} = -\boldsymbol{W}_I \boldsymbol{K}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{G})^{-1}$$



$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})$$



$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}_{11}$$



Definicije RS i RP

- **Analiza robusne stabilnosti** (RS): sa zadanim regulatorom $\boldsymbol{K}$ odrediti da li sistem ostaje stabilan za sve procese u neizvjesnom skupu.
- **Analiza robusne performanse** (RP): ako RS je zadovoljena, tada odrediti funkciju prijenosa od ulaza $\boldsymbol{w}$ do izlaza $\boldsymbol{z}$ za sve procese u neizvjesnom skupu.

$$\mathrm{NS} \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{N} \text{ je interno stabilan}$$

$$\mathrm{NP} \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \left\|\boldsymbol{N}_{22}\right\|_\infty < 1 \text{ i } \mathrm{NS}$$

$$\mathrm{RS} \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_u(\boldsymbol{N},\boldsymbol{\Delta}) \text{ je stabilan} \, \forall \boldsymbol{\Delta}, \ \left\|\boldsymbol{\Delta}\right\|_\infty \le 1$$

$$\mathrm{RP} \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \left\|\boldsymbol{F}\right\|_\infty \le 1, \quad \forall \boldsymbol{\Delta}, \ \left\|\boldsymbol{\Delta}\right\|_\infty \le 1 \text{ i } \mathrm{NS}$$

Generalizirani Nyquistov kriterij za RS

- **Teorem 1**. Pretpostavimo da su nominalni sistem $\boldsymbol{M}(s)$ i perturbacije $\boldsymbol{\Delta}(s)$ stabilni. Tada je $\boldsymbol{M\Delta}$-petlja stabilna ako i samo ako $\det(\boldsymbol{I}- \boldsymbol{M\Delta}(j\omega))$ ne obuhvata ishodište za bilo koje $\boldsymbol{\Delta}$ i ω, tj.

$$\boxed{\begin{aligned} &\Leftrightarrow \ \det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M\Delta}) \neq 0, \ \forall\omega, \ \forall\boldsymbol{\Delta} \\ &\Leftrightarrow \ \lambda_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{M\Delta}) \neq 1, \ \forall\omega, \ \forall\boldsymbol{\Delta} \\ &\overset{\boldsymbol{\Delta}\,\text{kompleksan}}{\Leftrightarrow} \ \left|\lambda_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{M\Delta})\right| < 1, \ \forall i, \ \forall\omega, \ \forall\boldsymbol{\Delta} \end{aligned}}$$

- Prema tome, imamo:

$$\boxed{\mathrm{RS} \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\boldsymbol{M\Delta}) < 1, \ \forall\omega, \ \forall\boldsymbol{\Delta}}$$

gdje je $\rho = \max_i |\lambda_i|$ spektralni radijus.

Generalizirani Nyquistov kriterij za RS

- Iz gornjeg izraza slijedi da imamo **robusnu stabilnost ako i samo ako je spektralni radijus od $M\Delta$ manji od 1 na svim frekvencijama i za sve dopuštene perturbacije Δ.**
- Glavni problem je testirati uvjet za beskonačan skup Δ , što je teško proveriti numerički.
- Generalizirani Nyquistov kriterij je primjenjiv na realne i kompleksne perturbacije, na temelju opće definicije strukturirane singularne vrijednosti.

Strukturirana i nestrukturirana neizvjesnost

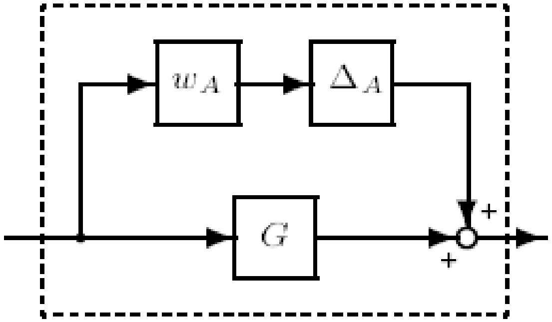
- **Strukturirana neizvjesnost** se može modelirati i poznaju se granice unutar kojih se mogu mijenjati neizvjesni parametri.
- Naprimjer, moguće je imati funkciju prijenosa nekog procesa, ali neizvjesne lokacije polova, nula ili pojačanja, odnosno parametara polinoma u brojniku i nazivniku funkcije prijenosa.
- **Nestrukturirana neizvjesnost** pretpostavlja manje znanja o procesu.
- Naprimjer, postoji samo znanje da frekvencijska karakteristika procesa leži unutar određenih granica.
- Nestrukturirana neizvjesnost je poznata i pod imenom dinamička neizvjesnost.

Nestrukturirana neizvjesnost

- **Nestrukturirana neizvjesnost** se često definira preko pune kompleksne matrice perturbacija $\boldsymbol{\Delta}$, čije su dimenzije kompatibilne sa dimenzijama procesa i gdje je na biloj kojoj frekvenciji $\Delta(j\omega)$ zadovoljen uvjet $\|\boldsymbol{\Delta}\|_\infty \leq 1$.
- Šest temeljnih oblika nestrukturirane neizvjesnosti prikazani su na sljedećem slajdu.
- Prve tri slike predstavljaju: aditivnu, multiplikativnu ulaznu i multiplikativnu izlaznu neizvjesnost:

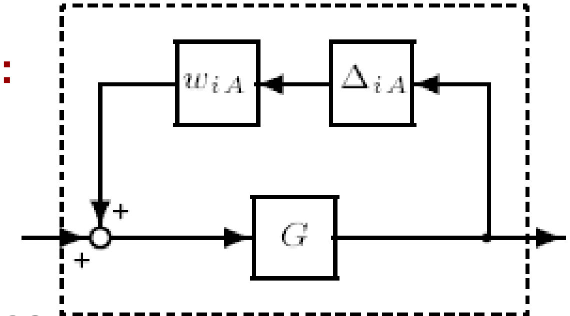
$$\begin{aligned}
&\Pi_A: \quad \boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{E}_A; \qquad && \boldsymbol{E}_A = w_A \boldsymbol{\Delta}_A \\
&\Pi_I: \quad \boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}_I); && \boldsymbol{E}_I = w_I \boldsymbol{\Delta}_I \\
&\Pi_O: \quad \boldsymbol{G}_p = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}_O)\boldsymbol{G}; && \boldsymbol{E}_O = w_O \boldsymbol{\Delta}_O
\end{aligned}$$

Nestrukturirana neizvjesnost

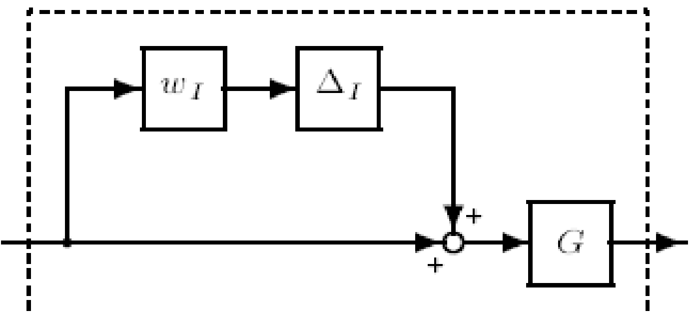


(a)

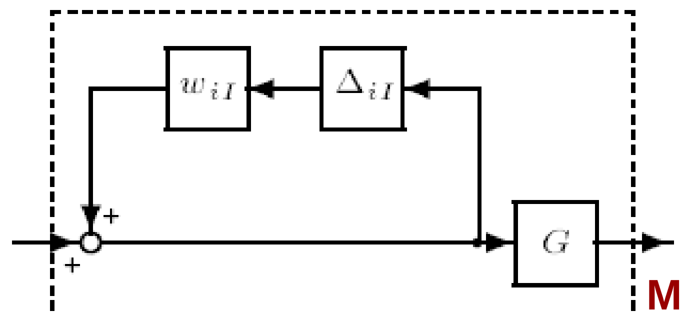
Aditivna neizvjesnost: model neizvjesnosti dodaje se nominalnom modelu procesa.



(d)

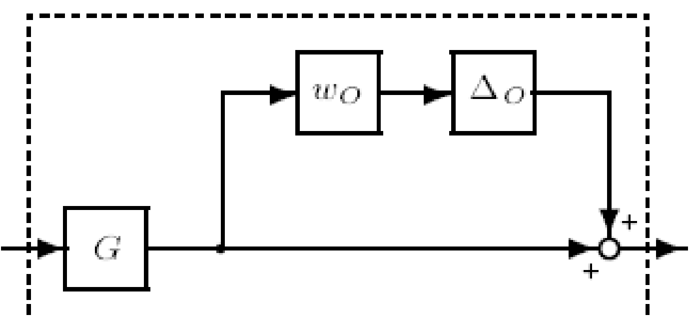


(b)

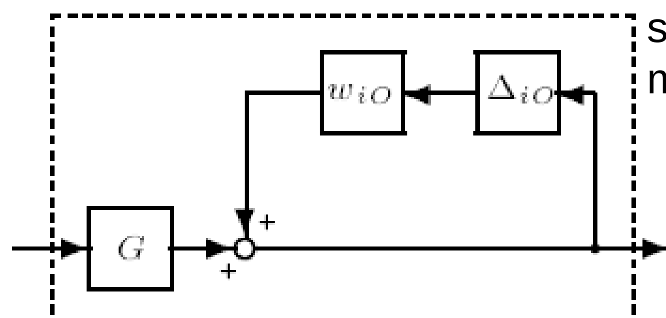


(e)

Multiplikativna neizvjesnost: model neizvjesnosti u seriji sa nominalnim modelom procesa.



(c)



(f)

Nestrukturirana neizvjesnost

- Na preostale tri slike prikazane su inverzne forme prethodne tri neizvjesnosti: inverzna aditivna, inverzna multiplikativno ulazna i inverzna multiplikativno izlazna neizvjesnost:

$$\Pi_{iA}: \quad \boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_{iA}\boldsymbol{G})^{-1}; \qquad \boldsymbol{E}_{iA} = w_{iA}\boldsymbol{\Delta}_{iA}$$

$$\Pi_{iI}: \quad \boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_{iI})^{-1}; \qquad \boldsymbol{E}_{iI} = w_{iI}\boldsymbol{\Delta}_{iI}$$

$$\Pi_{iO}: \quad \boldsymbol{G}_p = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_{iO})^{-1}\boldsymbol{G}; \qquad \boldsymbol{E}_{iO} = w_{iO}\boldsymbol{\Delta}_{iO}$$

- Negativan predznak $\boldsymbol{E}$-a ne igra neku ulogu budući da pretpostavljamo da $\boldsymbol{\Delta}$ može imati bilo koji predznak.
- $\boldsymbol{\Delta}$ označava normiranu perturbaciju i $\boldsymbol{E}$ “stvarnu” perturbaciju.

Nestrukturirana neizvjesnost

- Ovdje se mogu koristiti skalarne težine w, tako da imamo $\boldsymbol{E} = w\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}\, w$, ali se ponekad koriste i matrične težine, tj. $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{W}_2\boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{W}_1$, gdje su $\boldsymbol{W}_1$ i $\boldsymbol{W}_2$ matrične funkcije prijenosa.
- Kod SISO sistema obično se grupiraju višestruki izvori neizvjesnosti u jednu kompleksnu neizvjesnost (perturbaciju), najčešće u multiplikativnom obliku.
- Slično se može uraditi i kod MIMO sistema, s tim da kod njih postoji razlika u tome da li se radi o perturbaciji na ulazu ili izlazu.
- Skup procesa Π može se predstaviti **multiplikativnom izlaznom neizvjesnošću** sa skalarnom težinom $w_O(s)$ korištenjem izraza:

$$\boxed{\boldsymbol{G}_p = (\boldsymbol{I} + w_O\boldsymbol{\Delta}_O)\boldsymbol{G}, \quad \left\|\boldsymbol{\Delta}_O\right\|_\infty \leq 1}$$

Nestrukturirana neizvjesnost

- Ova multiplikativna neizvjesnost može se izraziti i na sljedeći način:

$$l_O(\omega) = \max_{\boldsymbol{G}_p \in \Pi} \bar{\sigma}((\boldsymbol{G}_p - \boldsymbol{G})\boldsymbol{G}^{-1}(j\omega)); \quad |w_O(j\omega)| \geq l_O(\omega), \quad \forall \omega$$

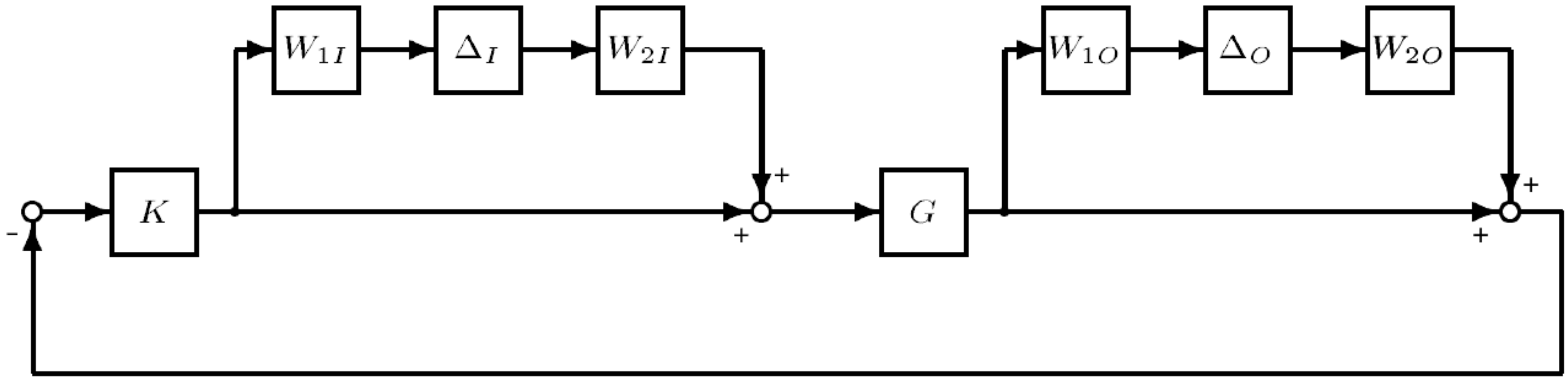
- Ukoliko je rezultantna težina neizvjesnosti prihvatljiva (mora biti manja od 1 u promatranom frekvencijskom području) i provedena analiza pokazala da su robusna stabilnosti i robusna performansa postignute, tada je grupiranje neizvjesnosti na izlazu opravdano.
- U suprotnom ide se na grupiranje neizvjesnosti na ulazu, tzv. **multiplikativna ulazna neizvjesnost**:

$$\boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{I} + w_I \boldsymbol{\Delta}_I), \quad \|\boldsymbol{\Delta}_I\|_\infty \leq 1$$

$$l_I(\omega) = \max_{\boldsymbol{G}_p \in \Pi} \bar{\sigma}(\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{G}_p - \boldsymbol{G})(j\omega)); \quad |w_I(j\omega)| \geq l_I(\omega), \quad \forall \omega$$

Nestrukturirana neizvjesnost

- **Primjer 2**. Kombiniranje multiplikativnih perturbacija (***MΔ***-struktura sistem sa multiplikativnim ulaznim i izlaznim neizvjesnostima).



- Skup mogućih procesa dan je sa:

$$\boldsymbol{G}_p = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{W}_{2O}\boldsymbol{\Delta}_O\boldsymbol{W}_{1O})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{W}_{2I}\boldsymbol{\Delta}_I\boldsymbol{W}_{1I})$$

gdje je $\|\boldsymbol{\Delta}_I\|_\infty \leq 1$ i $\|\boldsymbol{\Delta}_O\|_\infty \leq 1$.

Nestrukturirana neizvjesnost

- Grupiranjem neizvjesnosti u matricu:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Delta}_O \end{bmatrix}$$

i predstavljanjem sistema sa prethodnog slajda u $\boldsymbol{M\Delta}$-strukturu dobiva se:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_{1I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{W}_{1O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{T}_I & -\boldsymbol{KS} \\ \boldsymbol{SG} & -\boldsymbol{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_{2I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{W}_{2O} \end{bmatrix}$$

Dovoljan uvjet za RS je $\left\| \boldsymbol{M} \right\|_\infty < 1$,, ali se traži da $\boldsymbol{\Delta}$ bude strukturirana.

RS za nestrukturirane neizvjesnosti

- **Teorem2** . **Robusna stabilnost za nestrukturirane perturbacije**. Pretpostavimo da je nominalni sistem $\boldsymbol{M}(s)$ stabilan (NS) i da su perturbacije $\boldsymbol{\Delta}(s)$ stabilne. $\boldsymbol{M\Delta}$ sistem je stabilan za sve perturbacije $\boldsymbol{\Delta}$ koje ispunjavaju uvjet $\|\boldsymbol{\Delta}\|_\infty \le 1$ (odnosno imamo RS) ako i samo ako je:

$$\boxed{\mathrm{RS} \Leftrightarrow \rho(\boldsymbol{M\Delta}) < 1,\ \forall\omega,\ \forall\boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow \bar{\sigma}(\boldsymbol{M}) < 1,\ \forall\omega \Leftrightarrow \|\boldsymbol{M}\|_\infty < 1}$$

- Dokaz: Uvijek se može odabrati puna matrica $\boldsymbol{\Delta}$ takva da je $\rho(\boldsymbol{M\Delta}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{M})$
  - SVD od $\boldsymbol{M}$ daje $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U\Sigma V}^H$,
  - odabrati $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{VU}^H$ da se dobije $\boldsymbol{M\Delta} = \boldsymbol{U\Sigma U}^H$ $(\bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta}) = 1)$
  - $\rho(\boldsymbol{M\Delta}) = \rho(\boldsymbol{U\Sigma U}^H) = \rho(\boldsymbol{\Sigma}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{M})$

RS za nestrukturirane neizvjesnosti

- **Primjer 3**. Pretpostavimo da je $\Delta_I(s)$ puna matrica sa $\|\Delta_I\|_\infty \leq 1$, tada vrijedi (za sistem sa slajda 8.):

$$\mathrm{RS} \Leftrightarrow \|M\|_\infty < 1; \quad M = W_I K G (I + KG)^{-1} = W_I T_I$$

- Rezultat sličan sa SISO sistemima samo što je kod MIMO sistema $T_I = T$.
- Ali, dopušta se da puna matrica Δ može biti visoko konzervativna, tj.:
  - Neovisna ulazna neizvjesnost: Δ_I dijagonalna matrica,
  - Kombiniranje izvora neizvjesnosti: Δ blok-dijagonalna matrica.

RS za nestrukturirane neizvjesnosti

- **Primjena nestrukturiranih RS uvjeta**
- Predstavljanje nužnih i dovoljnih uvjeta za RS za svaku od šest ranije prikazanih nestrukturnih perturbacija sa:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{W}_2 \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{W}_1, \quad \left\| \boldsymbol{\Delta} \right\|_\infty \leq 1$$

- Određivanje matrice $\boldsymbol{M}$: izolacija perturbacije i određivanje matrice funkcije prijenosa:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{W}_2$$

od izlaza do ulazu perturbacije, gdje je $\boldsymbol{M}_0$ za svaki od šest slučajeva dan na sljedećem slajdu.

RS za nestrukturirane neizvjesnosti

- Tipovi nestrukturiranih neizvjesnosti:

$$\boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{E}_A \quad : \quad \boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{K})^{-1} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}_I) \quad : \quad \boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{T}_I$$

$$\boldsymbol{G}_p = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}_O)\boldsymbol{G} \quad : \quad \boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{G}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{K})^{-1} = \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{G}_p = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_{iA}\boldsymbol{G})^{-1} : \quad \boldsymbol{M}_0 = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{G}$$

$$\boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_{iI})^{-1} : \quad \boldsymbol{M}_0 = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{G})^{-1} = \boldsymbol{S}_I$$

$$\boldsymbol{G}_p = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_{iO})^{-1}\boldsymbol{G} : \quad \boldsymbol{M}_0 = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{K})^{-1} = \boldsymbol{S}$$

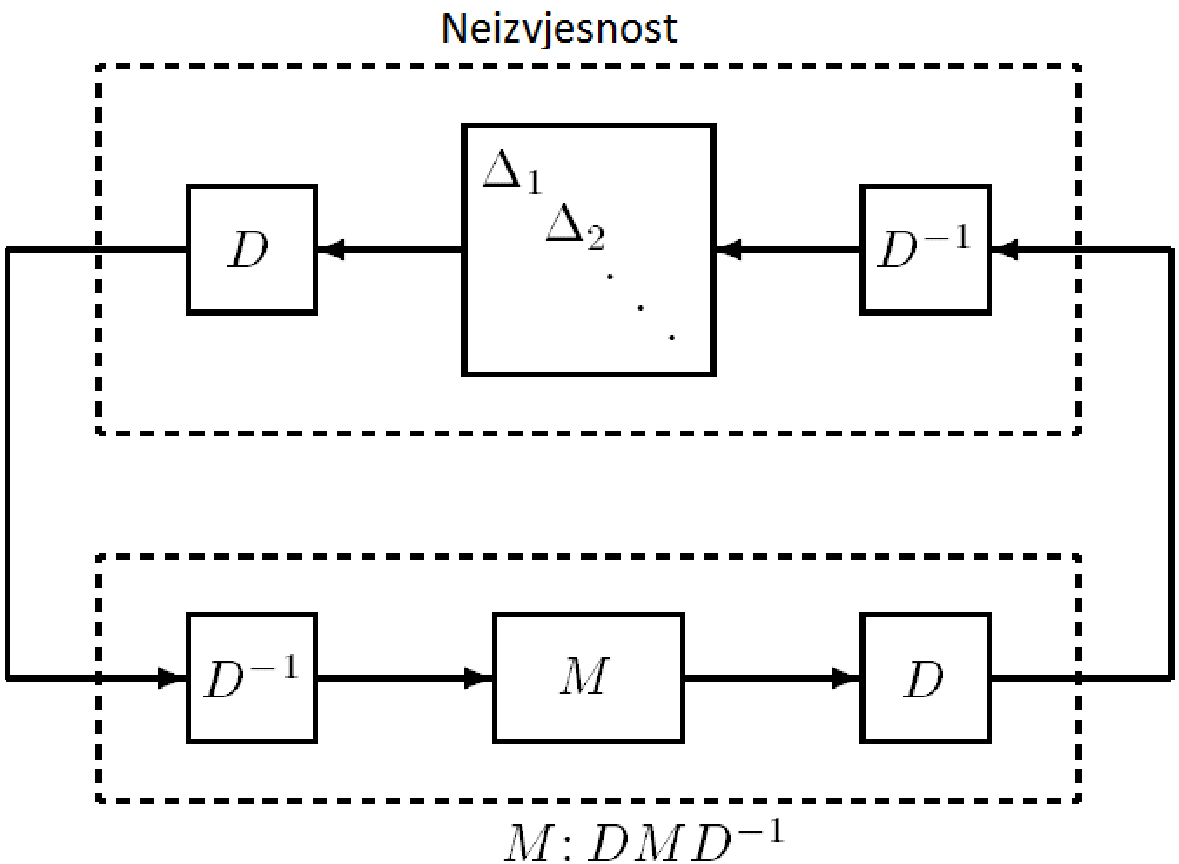
- Teorem za RS za nestrukturirane neizvjesnosti daje:

$$\boxed{\mathrm{RS} \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{W}_2 (j\omega) \right\|_\infty < 1, \quad \forall \omega}$$

RS za strukturiranu neizvjesnost

- Promatrajmo strukturiranu neizvjesnost $\boldsymbol{\Delta} = \mathrm{diag}\{\Delta_i\}$.
- Testiranje RS za sistem sa $\boldsymbol{M\Delta}$ - strukturom:

$$\boxed{\text{RS} \quad \text{ako} \quad \bar{\sigma}(\boldsymbol{M}(j\omega)) < 1, \quad \forall\omega}$$



RS za strukturiranu neizvjesnost

- Osnovna ideja: **učiniti stabilnost neovisnom o skaliranju**.
- Da bi se osigurala neovisnost stabilnosti o skaliranju uvodi se blok-dijagonalna matrica skaliranja:

$$\boxed{\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}\left\{d_i \boldsymbol{I}_i\right\}}$$

gdje je d_i skalar i $\boldsymbol{I}_i$ matrica identiteta (jedinična matrica) istih dimenzija kao blok $\boldsymbol{\Delta}_i$ matrice perturbacije.

- Dodavanje $\boldsymbol{D}$ i $\boldsymbol{D}^{-1}$ na obje strane $\boldsymbol{M}$-a nema utjecaja na stabilnost.
- Uvjet RS sada glasi:

$$\boxed{\text{RS} \quad \text{ako} \quad \bar{\sigma}\left(\boldsymbol{DMD}^{-1}\right) < 1, \quad \forall \omega}$$

RS za strukturiranu neizvjesnost

- Poboljšanje se dobiva minimiziranjem izraza na svim frekvencijama:

$$\text{RS} \quad \text{ako} \quad \min_{\boldsymbol{D}(\omega)\in\mathfrak{I}} \bar{\sigma}\left(\boldsymbol{D}(\omega)\boldsymbol{M}(j\omega)\boldsymbol{D}(\omega)^{-1}\right) < 1, \quad \forall\omega$$

gdje je $\mathfrak{I}$ skup svih blok-dijagonalnih matrica čija struktura je kompatibilna sa strukturom matrice neizvjesnosti $\boldsymbol{\Delta}$, tj. $\boldsymbol{\Delta D} = \boldsymbol{D\Delta}$.

Strukturirana singularna vrijednost μ

- Prethodni izraz za RS uvjet motiviran je uvođenjem strukturirane singularne vrijednosti μ, gdje imamo:

$$\boxed{\mu(\boldsymbol{M}) \leq \min_{\boldsymbol{D}(\omega)\in\Im} \bar{\sigma}(\boldsymbol{DMD}^{-1})}$$

- Općenito, za kompleksne perturbacije izražene blok-dijagonalnim matricama imamo da je $\mu(\boldsymbol{M})$ veoma blizu $\min_{\boldsymbol{D}} \bar{\sigma}(\boldsymbol{DMD}^{-1})$.
- Strukturirana singularna vrijednost μ je funkcija koja daje generalizaciju singularne vrijednosti $\bar{\sigma}$.
- μ se koristi za dobivanje nužnih i dovoljnih uvjeta za RS i RP.
- Postavlja se pitanje kako definirati singularnu strukturiranu vrijednost?

Strukturirana singularna vrijednost μ

- Polazi se od generaliziranog Nyquistovog kriterija za $\boldsymbol{M\Delta}$ - strukturu: traži se najmanja strukturirana neizvjesnost $\boldsymbol{\Delta}$ takva da je $\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M\Delta}) = 0$.
- Strukturirana singularna vrijednost $\mu(\boldsymbol{M})$ definira se preko inverzije perturbacije:

$$\boxed{\mu(\boldsymbol{M})^{-1} \overset{\text{def}}{=} \min_{\boldsymbol{\Delta}} \left\{ \overline{\sigma}(\boldsymbol{\Delta}) \,|\, \det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M\Delta}) = 0 \right\}}$$

- Definirana je za konstantne kompleksne matrice, npr. na zadanoj frekvenciji.
- $\mu(\boldsymbol{M})$ ovisio o $\boldsymbol{M}$ i o strukturi $\boldsymbol{\Delta}$, često se piše $\mu_{\Delta}(\boldsymbol{M})$.
- Sa punom matricom $\boldsymbol{\Delta}$ (nestrukturirana matrica) najmanja perturbacija, koja daje singularitet od $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M\Delta}$, ima $\overline{\sigma}(\boldsymbol{M}) = 1/\overline{\sigma}(\boldsymbol{M})$, iz čega slijedi $\boxed{\mu(\boldsymbol{M}) = \overline{\sigma}(\boldsymbol{M})}$

Strukturirana singularna vrijednost μ

Gornji izraz slijedi iz $\Delta = \left(1/\bar{\sigma}(\boldsymbol{M})\right)\bar{\boldsymbol{v}}\bar{\boldsymbol{u}}^H$

- Kada se koristi ponavljajuća dijagonalna matrica $\Delta = \delta\boldsymbol{I}$, tada najmanja perturbacija ima $\bar{\sigma}(\boldsymbol{M}) = 1/\rho(\boldsymbol{M})$ iz čega slijedi:

$$\boxed{\mu(\boldsymbol{M}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{M})}$$

- Općenito vrijedi:

$$\boxed{\rho(\boldsymbol{M}) \leq \mu(\boldsymbol{M}) \leq \bar{\sigma}(\boldsymbol{M})}$$

- U sljedećem primjeru demonstrira se kako μ ovisi o strukturi perturbacije Δ (da li je Δ puna ili dijagonalna matrica).

Strukturirana singularna vrijednost μ

- **Primjer 4**. **Puna matrica** Δ (nestrukturirana).
- Neka je:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.894 & 0.447 \\ -0.447 & 0.894 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.162 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}^H$$

- Perturbacija:

$$\Delta = \frac{1}{\bar{\sigma}} \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{u}_1^H = \frac{1}{3.162} \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.894 & -0.447 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.200 & -0.100 \\ 0.200 & -0.100 \end{bmatrix}$$

- Sa $\bar{\sigma}(\Delta) = 1/\bar{\sigma}(\boldsymbol{M}) = 1/3.162 = 0.316 \Rightarrow \det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}\Delta) = 0.$
- $\mu(\boldsymbol{M}) = 3.162$ kada je Δ puna matrica.

Strukturirana singularna vrijednost μ

- Navedeno vrijedi kada je Δ puna matrica.
- Ukoliko se načini restrikcija na Δ da bude dijagonalna matrica tada je potrebna veća perturbacija da se dobije $\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M\Delta}) = 0$.
- Ako je Δ **dijagonalna perturbacija**, odnosno strukturirana, tada za matricu $\boldsymbol{M}$ najmanja dijagonalna matrica Δ kojom se dobiva $\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M\Delta}) = 0$ iznosi:

$$\Delta = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

gdje je $\bar{\sigma}(\Delta) = 0.333$.

- $\mu(\boldsymbol{M}) = 3$ kada je Δ dijagonalna matrica.

Strukturirana singularna vrijednost μ

- Velika vrijednost μ nije dobar izbor, što znači da mala perturbacija dovodi do toga da $\boldsymbol{I}$ - $\boldsymbol{M\Delta}$ bude singularna.
- Manja vrijednost μ je dobar izbor.
- $\mu(\boldsymbol{M})$ omogućuje generalizaciju spektralnog radijusa $\rho(\boldsymbol{M})$ i spektralne norme $\bar{\sigma}$.
- Sekvenca $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{\Delta}$ u definiciji μ nije važna, što slijedi iz identiteta:

$$\boxed{\det(\boldsymbol{I} - k_m \boldsymbol{M\Delta}) = \det(\boldsymbol{I} - k_m \boldsymbol{\Delta M})}$$

- Kada je $k_m = 0$ dobiva se matrica $\boldsymbol{I}$ - $k_m\boldsymbol{M\Delta}$ koja nije singularna.

Strukturirana singularna vrijednost μ

- μ obično nije moguće direktno izračunati, računanje je zasnovano na donjim i gornjim granicama.
- Najviše korištena gornja granica je:

$$\boxed{\mu(\boldsymbol{M}) \leq \min_{\boldsymbol{D}(\omega)\in\Im} \overline{\sigma}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}\boldsymbol{D}^{-1})}$$

- Problem konveksne optimizacije.

RS sa strukturiranom neizvjesnošću

- Promatra se $\boldsymbol{M\Delta}$ - struktura kada je $\boldsymbol{\Delta}$ skup norma-ograničenih blok-dijagonalnih perturbacija.
- Na temelju teorema sa slajda 12. dobiva se:

$$\boxed{\mathrm{RS} \Leftrightarrow \det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}(j\omega)\boldsymbol{\Delta}(j\omega)) \neq 0,\ \forall\omega, \forall\boldsymbol{\Delta},\ \bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta}(j\omega)) \leq 1 \forall\omega}$$

- Ovo predstavlja “da/ne” uvjet.
- Da bi se pronašao k_m koji čini sistem robusno stabilnim potrebno je skalirati neizvjesnost $\boldsymbol{\Delta}$ sa k_m i izračunati najmanji k_m koji zadovoljava uvjet:

$$\boxed{\det(\boldsymbol{I} - k_m \boldsymbol{M\Delta}) = 0}$$

- Korištenjem definicije singularne strukturirane vrijednosti μ ova vrijednost je $k_m = 1/\mu(\boldsymbol{M})$.

RS sa strukturiranom neizvjesnošću

Nužni i dovoljni uvjeti za robusnu stabilnost

- **Teorem 3. RS za blok-dijagonalne perturbacije (realne ili kompleksne)**. Pretpostavimo da su nominalni model $\boldsymbol{M}$ i perturbacije $\boldsymbol{\Delta}$ stabilni. Slijedi da je $\boldsymbol{M\Delta}$ - sistem stabilan za sve dostupne perturbacije sa $\bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta}) \leq 1, \ \forall \omega$ ako i samo ako je:

$$\boxed{\mu(\boldsymbol{M}(j\omega)) < 1, \ \forall \omega}$$

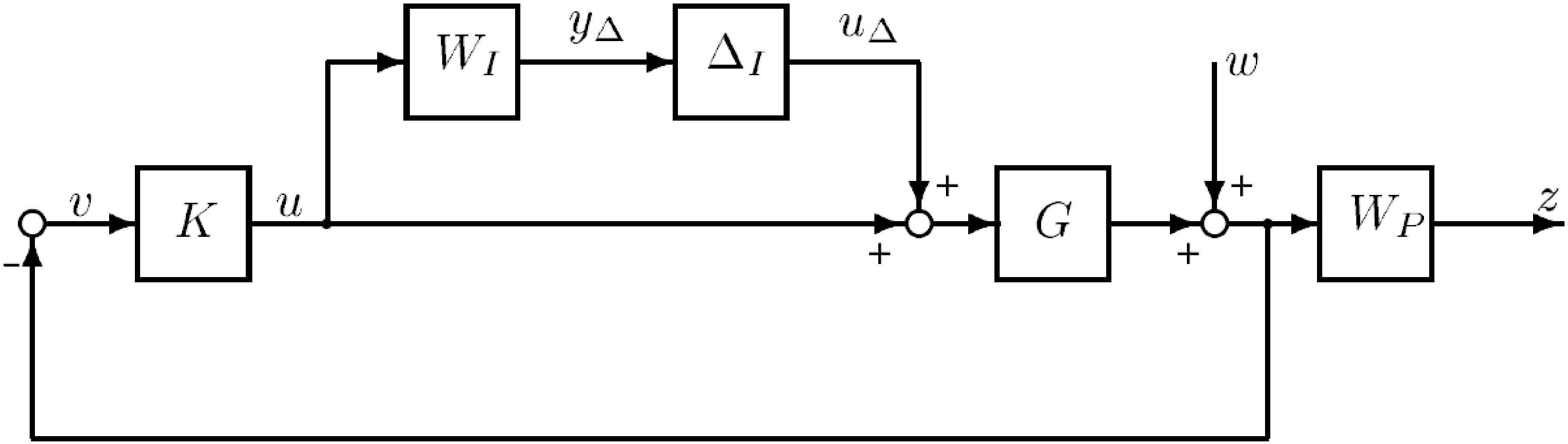
- Uvjet za RS za MIMO sistem glasi:

$$\boxed{\text{RS} \Leftrightarrow \ \mu(\boldsymbol{M}(j\omega))\bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta}(j\omega)) < 1, \ \ \forall \omega}$$

koji se može interpretirati kao **generalizirani teorem malog pojačanja** koji uzima u obzir strukturu $\boldsymbol{\Delta}$.

RS sa strukturiranom neizvjesnošću

- **Primjer 4. RS sa dijagonalnom ulaznom neizvjesnošću.** Razmatra se robusna stabilnost sistema na slici.



- Nominalni proces i regulator (PI regulator destilacijskog procesa) dani su sa:

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{1}{\tau s + 1}\begin{bmatrix} -87.8 & 1.4 \\ -108.2 & -1.4 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{K}(s) = \frac{1+\tau s}{s}\begin{bmatrix} -0.0015 & 0 \\ 0 & -0.075 \end{bmatrix}$$

RS sa strukturiranom neizvjesnošću

- Regulator rezultira nominalno stabilnim sistemom sa prihvatljivim performansama.
- Pretpostavimo da postoji kompleksna multiplikativna neizvjesnost na svakom manipulativnom ulazu amplitude:

$$w_I(s) = \frac{s+0.2}{0.5s+1}$$

- Svođenjem sistema na $\boldsymbol{M\Delta}$ - strukturu dobiva se:

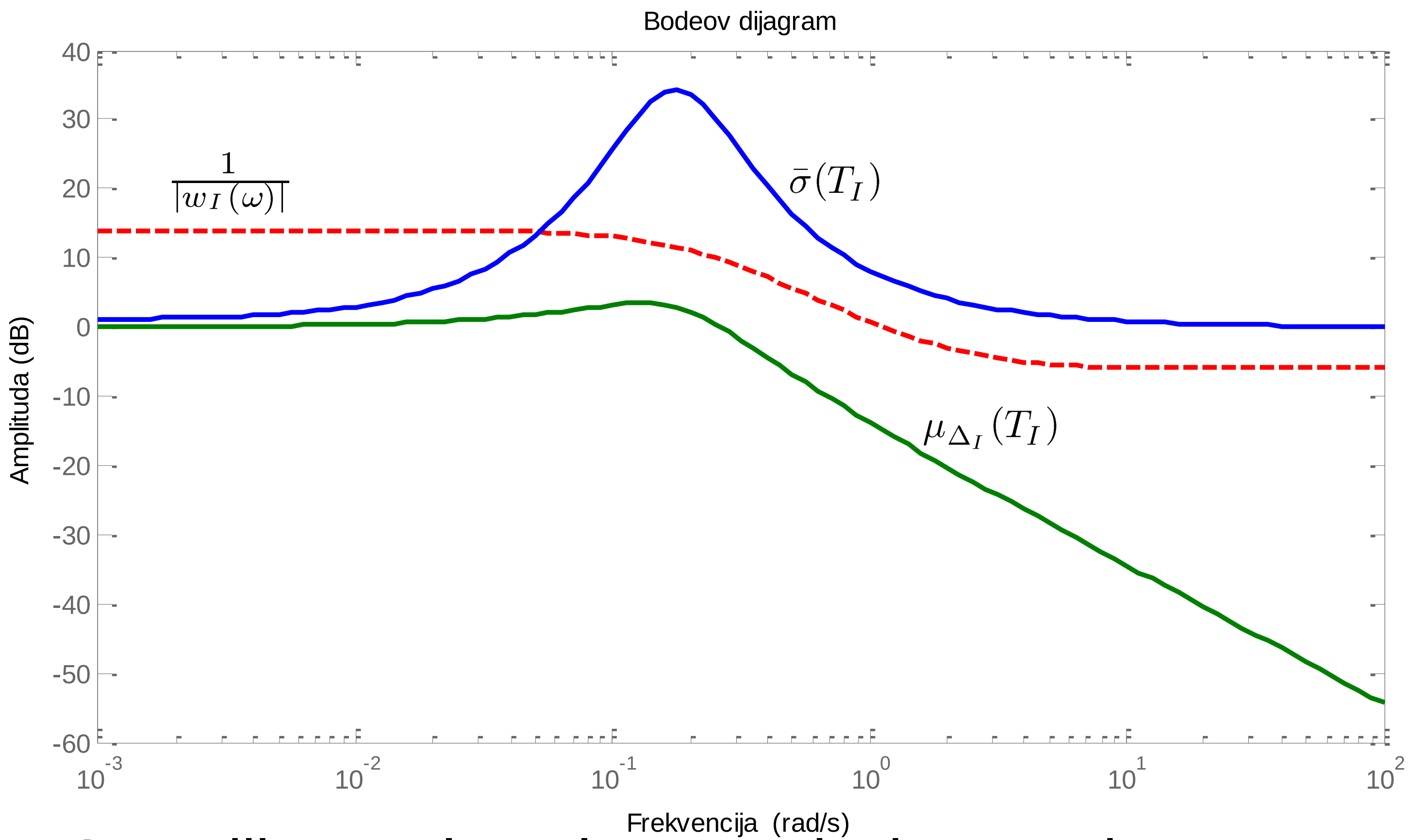
$$\boldsymbol{M} = w_I \boldsymbol{KG}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{KG})^{-1} = w_I \boldsymbol{T}_I$$

i RS uvjet $\mu(\boldsymbol{M}) < 1$ u teoremu za RS daje:

$$\text{RS} \Leftrightarrow \mu_{\Delta_I}(\boldsymbol{T}_I) < \frac{1}{|w_I(j\omega)|}, \quad \forall \omega, \; \boldsymbol{\Delta}_I = \begin{bmatrix} \delta_1 & \\ & \delta_2 \end{bmatrix}$$

RS sa strukturiranom neizvjesnošću

- Ovaj uvjet je grafički ilustriran na slici.



- RS za dijagonalnu ulaznu neizvjesnost je zagarantirana jer je $\mu_{\Delta_I}(T_I) < 1/|w_I|, \forall \omega$ na širokom frekvencijskom opsegu. Sistem će biti nestabilan za punu blokovsku ulaznu neizvjesnost (Δ_I je puna matrica).

RS sa strukturiranom neizvjesnošću

- **Primjer 5**. **RS satelita.** Upravljanje ugaonom brzinom satelita oko jedne od osi, gdje je njegova funkcija prijenosa:

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{1}{s^2 + a^2} \begin{bmatrix} s - a^2 & a(s+1) \\ -a(s+1) & s - a^2 \end{bmatrix}; \quad a = 10$$

- Minimalan prikaz u prostoru stanja $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$:

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & a & 1 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

RS sa strukturiranom neizvjesnošću

- Polovi su $s = \pm ja$. Za stabilizaciju vrijedi:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}$$

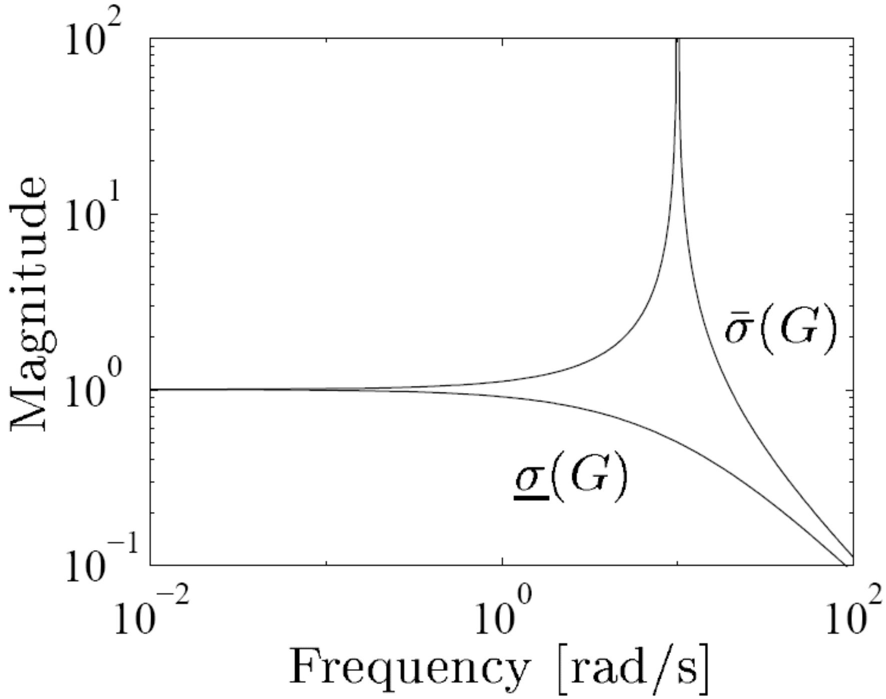
$$\boldsymbol{T}(s) = \boldsymbol{GK}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{GK})^{-1} = \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

- **Nominalna stabilnost (NS)**. Dva pola zatvorene petlje u s = -1 i:

$$\boldsymbol{A}_{cl} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BKC} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

RS sa strukturiranom neizvjesnošću

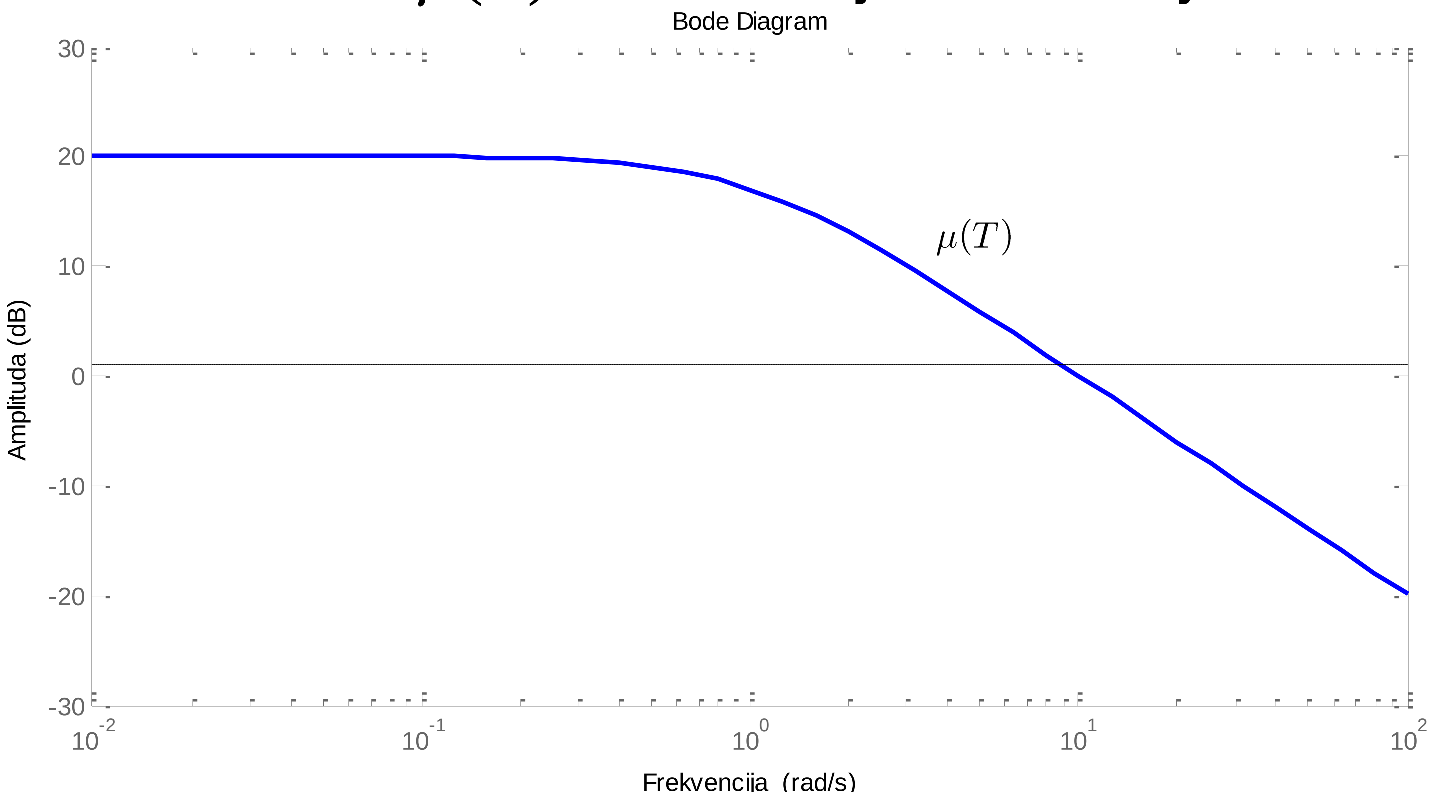
- **Nominalna performansa (NP)**. Analiza dobivenih rezultata (singularne vrijednosti).



- $\underline{\sigma}(L) \leq 1, \forall \omega$, oskudne performanse u pravcu malog pojačanja.
- g_{12}, g_{21} veliki $\Rightarrow$ jaka interakcija.

RS sa strukturiranom neizvjesnošću

- **Robusna stabilnost (RS)**.
- Analiza odziva $\mu(T)$ kao funkcije frekvencije.



- $\mu(T)$ siječe 1 oko 10 rad/s $\Rightarrow$ može se tolerirati više od 100% neizvjesnosti na frekvencijama iznad 10 rad/s.
- Na niskim frekvencijama, $\mu(T) \approx 10$ i može garantirati RS sa tolerancijom do najviše 10% neizvjesnosti (kompleksne).

RS sa strukturiranom neizvjesnošću

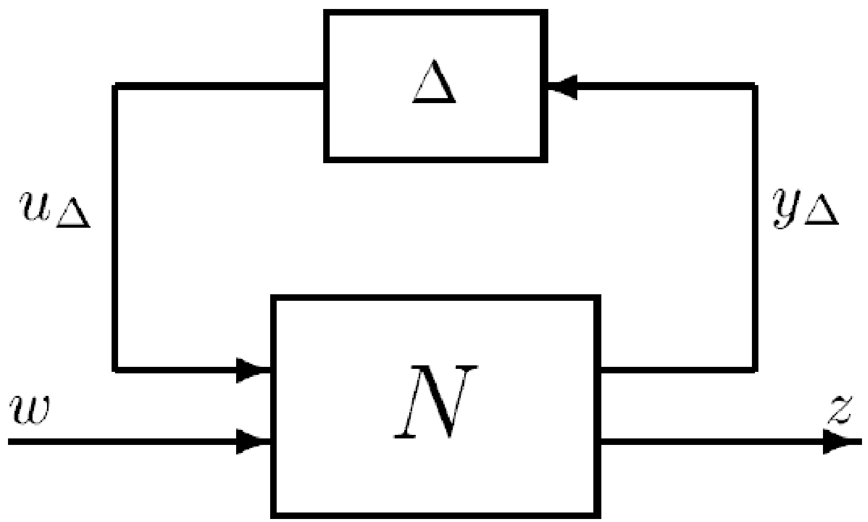
- Ovo potvrđuje rezultate iz lekcije 1. gdje je pokazano da realne perturbacije δ_1=0.1 i δ_2 = -0.1 dovode do nestabilnosti procesa.
- Korištenje kompleksne umjesto realne perturbacije nije konzervativno u ovom slučaju, najmanje za dijagonalnu Δ_i.
- Međutim, **za ponavljajuću skalarnu perturbaciju** (tj. neizvjesnost identična za svaki kanal) postoji razlika između realne i kompleksne perturbacije.
- Kod ponavljajuće **realne perturbacije** dobiva se vršna vrijednost $\mu = 1$, tako da se mogu tolerirati perturbacije $\delta_1 = \delta_2$ amplitude 1 prije postizanja nestabilnosti (ovo je potvrđeno u primjeru u lekciji 1. razmatrajući karakteristični polinom iz koga je za $\delta_1 = \delta_2 = -1$ postignuta nestabilnost procesa).

RS sa strukturiranom neizvjesnošću

- Sa **kompleksnom ponavljajućom perturbacijom** imamo $\mu(\boldsymbol{T}) = \rho(\boldsymbol{T}) = 10$ na niskom frekvencijama, tako da se nestabilnost može pojaviti sa kompleksnim $\delta_1 = \delta_2$ amplitude 0.1.
- U primjeru iz lekcije 1. može se vidjeti da konstantna perturbacija $\delta_1 = \delta_2 = j0.1$ uzrokuje nestabilnost.

Robusna performansa (RP)

- Robusna performansa (RP) znači da je ciljna performansa zadovoljena za sve moguće procese u neizvjesnom skupu, čak i za najlošiji proces.
- U lekciji 3. smo vidjeli da za SISO sistem sa H_∞ ciljnom performansom, RP uvjet je identičan RS uvjetu sa dodatnim perturbacijskim blokom.



$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_\Delta \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \boldsymbol{N} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_\Delta \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{w}$$

Robusna performansa (RP)

- Pretpostavimo pravilno skaliranje tako da je performansa cilja:

$$\boxed{\max_{w} \frac{\|\boldsymbol{z}\|_2}{\|\boldsymbol{w}\|_2} < 1, \quad \forall \omega \;\Leftrightarrow\; \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{\Delta})\|_\infty < 1, \; \forall \boldsymbol{\Delta}}$$

- Ovo odgovara uvjetu stabilnosti za $\boldsymbol{M\Delta}_p$ - strukturu sa $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{\Delta})$ i $\boldsymbol{\Delta}_p$ je puna kompleksna matrica perturbacija istih dimenzija kao $\boldsymbol{F}^T$.

Robusna performansa (RP)

- **Teorem 4. Robusna performansa (RP).** Preformulirajmo neizvjestan sistem u $N\Delta$ - strukturu (slika na sljedećem slajdu). Pretpostavimo nominalnu stabilnost tako da je N (interno) stabilan. Tada je:

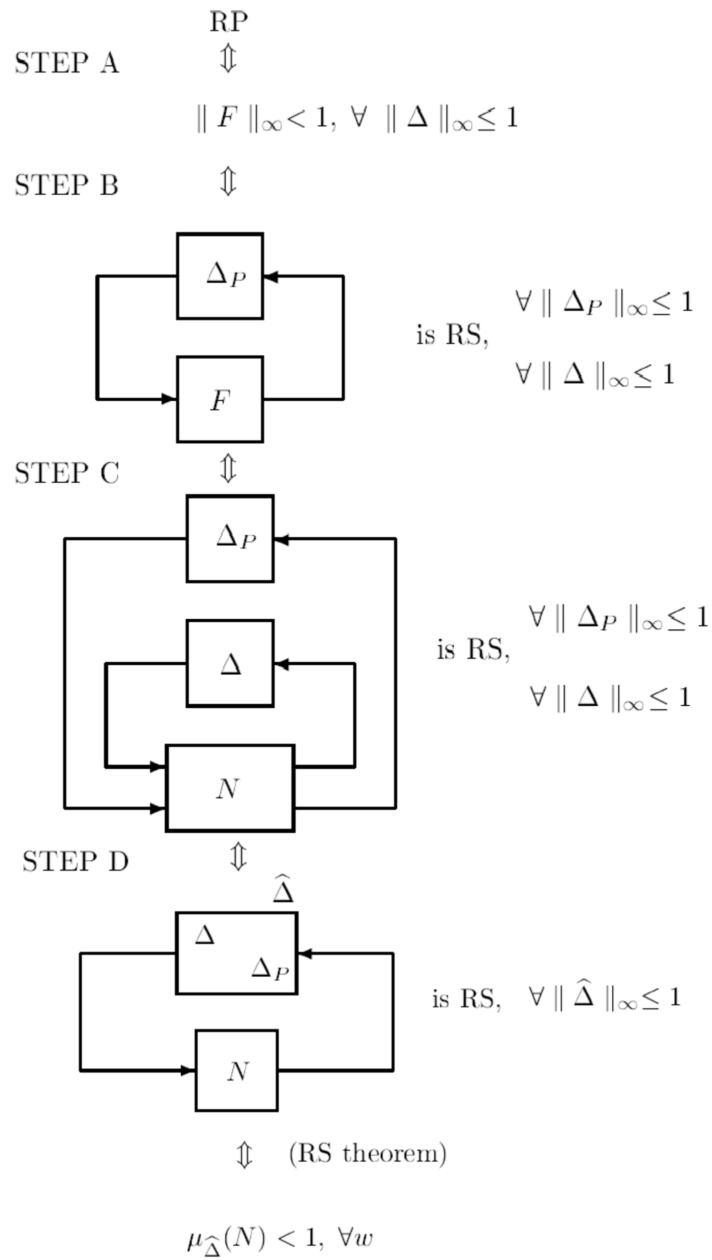
$$\text{RP} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \|F\|_\infty = \|F_u(N,\Delta)\|_\infty < 1, \forall \|\Delta\|_\infty \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \mu_{\hat{\Delta}}(N(j\omega)) < 1, \ \forall \omega$$

gdje je μ računat s obzirom na strukturu:

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_p \end{bmatrix}$$

Robusna performansa (RP)

RP kao specijalan slučaj strukturirane RS.



Dokaz teorema robusne performanse korištenjem blokovskog dijagrama.

Algebarski dokaz ovog teorema – korištenje Schur-ove formule.

Sumarno o μ uvjetima za NP, RS i RP

- Preformulirajmo neizvjestan sistem u $N\Delta$ - strukturu gdje blok-dijagonalne perturbacije zadovoljavaju uvjet $\|\Delta\|_\infty \le 1$. Uvedimo:

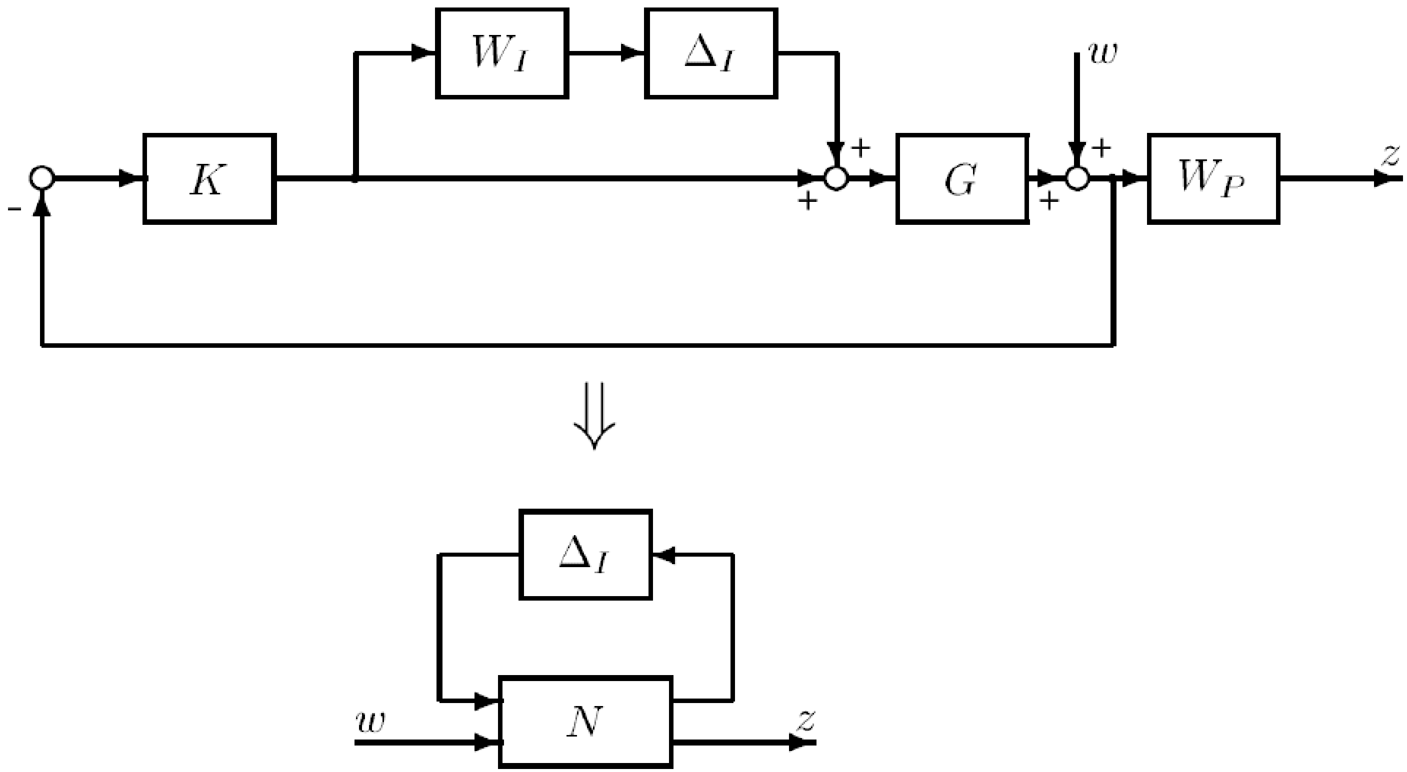
$$F = F_u(N, \Delta) = N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1} N_{12}$$

i neka je zahtjev za performanse (RP) $\|F\|_\infty \le 1$ vrijedi za sve dostupne perturbacije. Tada imamo:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{NS} \Leftrightarrow \ N \text{ stabilna (interno)}\\
&\mathrm{NP} \Leftrightarrow \ \bar{\sigma}(N_{22}) = \mu_{\Delta_p} < 1,\ \forall\omega, \text{ i NS}\\
&\mathrm{RS} \Leftrightarrow \ \mu_\Delta(N_{22}) < 1,\ \forall\omega, \text{ i NS}\\
&\mathrm{RP} \Leftrightarrow \ \mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1,\ \forall\omega,\ \hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_p \end{bmatrix}, \text{ i NS}
\end{aligned}$$

Primjena: RP sa ulaznom neizvjesnošću

- Ispitivanje robusne performanse sistema sa ulaznom neizvjesnošću.



- Zahtjev na performanse je:

$$\mathrm{RP} \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \left\| w_P (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_p \boldsymbol{K})^{-1} \right\|_\infty < 1, \quad \forall \boldsymbol{G}_p$$

Primjena: RP sa ulaznom neizvjesnošću

- Razmatrani skup procesa:

$$\boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{I} + w_I \boldsymbol{\Delta}_I), \quad \left\| \boldsymbol{\Delta}_I \right\|_\infty \leq 1$$

gdje su $w_P(s)$ i $w_I(s)$ skalarne težine, tako da je ciljna performansa ista za sve izlaze, a neizvjesnost je jednaka za sve ulaze.

- Najčešće se pretpostavlja da je $\boldsymbol{\Delta}_I$ dijagonalna matrica, ali ćemo također razmatrati slučaj kada je $\boldsymbol{\Delta}_I$ puna matrica.
- Ovaj problem je odličan za ilustraciju analize robusnosti neizvjesnih multivarijabilnih (MIMO) sistema.

Primjena: RP sa ulaznom neizvjesnošću

- **U nastavku se razmatra sljedeće**:
  - Pronalaženje međupovezne matrice N za ovaj problem.
  - Razmatranje SISO slučaja, tako da se korisne veze mogu načiniti na temelju rezultata iz prethodnog dijela predavanja.
  - Analiza MIMO destilacijskog procesa sa raspregnutim regulatorom osjetljivim na male pogreška ulaznih pojačanja. Također će se naći μ koji je za RP mnogo veći od 1, za slučaj raspregnutog regulatora.
  - Pronaći granice za μ za ovaj problem i diskutirati o ulozi kondicionog broja.
  - Načiniti komparaciju sa slučajem kod koga je neizvjesnost locirana na izlazu.

Primjena: RP sa ulaznom neizvjesnošću

Međupovezna matrica

- Iz prethodne slike slijedi:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} w_I \boldsymbol{T}_I & w_I \boldsymbol{KS} \\ w_P \boldsymbol{SG} & w_P \boldsymbol{S} \end{bmatrix}$$

gdje su: $\boldsymbol{T}_I = \boldsymbol{KG}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{KG})^{-1}$ i $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{GK})^{-1}$, zbog jednostavnosti je izostavljen predznak (-) u blokovima (1,1) i (1,2) matrice $\boldsymbol{N}$, budući da je $\mu(\boldsymbol{N}) = \mu(\boldsymbol{UN})$ sa unitarnom matricom $\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

- Za zadani regulator u nastavku se testira NS, NP, RS i RP, pri čemu $\boldsymbol{\Delta}_I$ može biti puna ili dijagonalna matrica.

Primjena: RP sa ulaznom neizvjesnošću

RP sa ulaznom neizvjesnošću za SISO sistem

- Za SISO sistem uvjeti sa slajda br. 50 i prethodni izraz za N postaju:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{NS} \Leftrightarrow \quad S, SG, KS \text{ i } T_I \text{ stabilne}\\
&\mathrm{NP} \Leftrightarrow \quad |w_P S| < 1, \ \forall\omega\\
&\mathrm{RS} \Leftrightarrow \quad |w_I T_I| < 1, \ \forall\omega\\
&\mathrm{RP} \Leftrightarrow \quad |w_P S| + |w_I T_I| < 1, \ \forall\omega
\end{aligned}
$$

- Uvjet za RP slijedi iz:

$$\mu(\boldsymbol{N}) = \mu\begin{bmatrix} w_I \boldsymbol{T}_I & w_I \boldsymbol{KS} \\ w_P \boldsymbol{SG} & w_P \boldsymbol{S} \end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix} w_I \boldsymbol{T}_I & w_I \boldsymbol{T}_I \\ w_P \boldsymbol{S} & w_P \boldsymbol{S} \end{bmatrix} = |w_I \boldsymbol{T}_I| + |w_P \boldsymbol{S}|$$

Primjena: RP sa ulaznom neizvjesnošću

RP za 2x2 destilacijski proces

- Promatra se ranije opisani destilacijski proces (lekcija 1.) sa regulatorom (IB – inverse-based controller):

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{1}{75s+1}\begin{bmatrix} 87.8 & -86.4 \\ 108.2 & -109.6 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{K}(s) = \frac{0.7}{s}\boldsymbol{G}(s)^{-1}$$

- Regulator osigurava nominalno rasprezanje sistema sa:

$$\boldsymbol{L} = l\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{S} = \varepsilon\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{T} = t\boldsymbol{I}$$

gdje su:

$$l = \frac{0.7}{s}, \quad \varepsilon = \frac{1}{1+l} = \frac{s}{s+0.7}$$

$$t = 1-\varepsilon = \frac{0.7}{s+0.7} = \frac{1}{1.43s+1}$$

Primjena: RP sa ulaznom neizvjesnošću

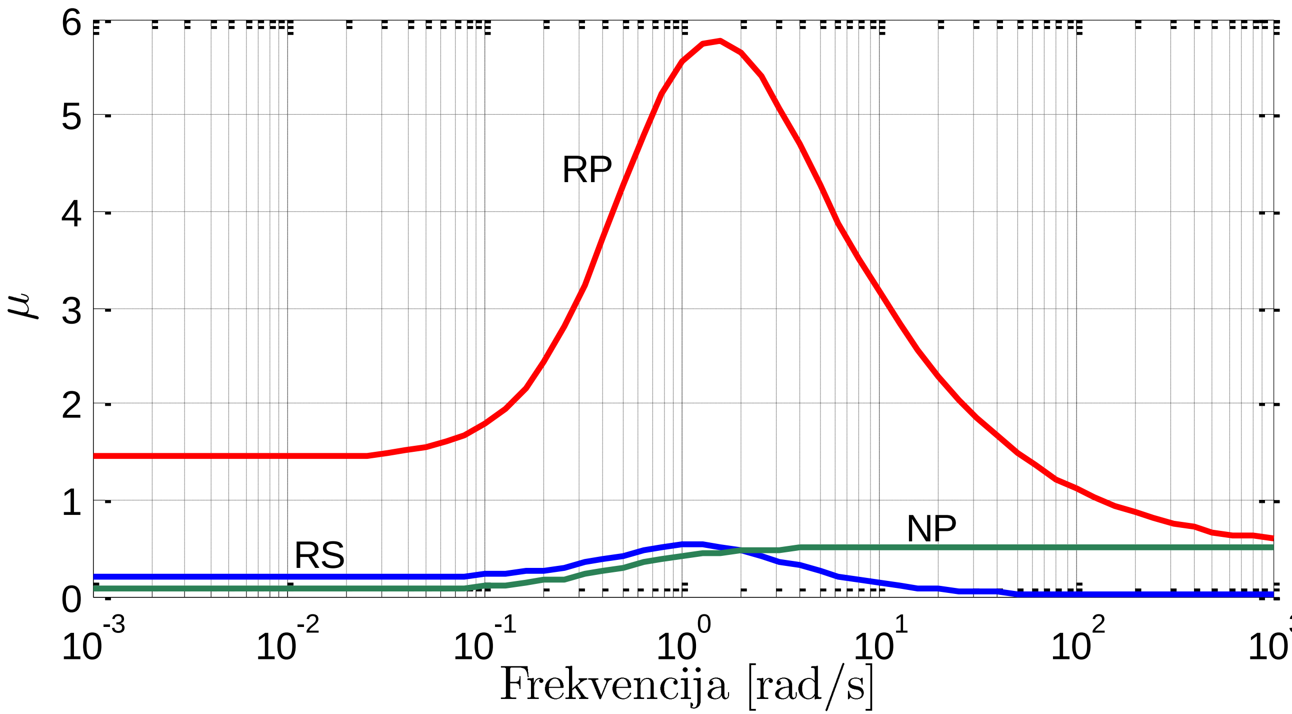
- Koristimo ε za nominalnu osjetljivost u svakoj petlji.
- U primjeru destilacijskog procesa iz prve lekcije, regulator je dao odličan nominalni odziv, ali je odziv sa 20% neizvjesnosti pojačanja u svakom ulaznom kanalu jako slab.
- Ove rezultate ćemo sada provjeriti korištenjem μ-analize.
- Izbor težina za neizvjesnost i performanse:

$$w_I(s) = \frac{s+0.2}{0.5s+a}; \quad w_P(s) = \frac{s/2+0.05}{s}$$

- Težinom neizvjesnosti $w_I(s)$ može se aproksimativno predstaviti 20% pogreške pojačanja i zanemarenog vremena kašnjenje od 0.9 minuta.

Primjena: RP sa ulaznom neizvjesnošću

- Težina performansi $w_P(s)$ specificira integralno djelovanje, propusni opseg zatvorene petlje oko 0.05 [rad/min], i maksimalnu vršnu vrijednost $\bar{\sigma}(S)$ od $M_s = 2$.
- Grafički prikaz μ destilacijskog procesa sa raspregnutim regulatorom.



Primjena: RP sa ulaznom neizvjesnošću

- Sumarni rezultati:
- **NS**. Da.
- **NP**. Sa raspregnutim regulatorom imamo:

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{N}_{22}) = \bar{\sigma}(w_P \boldsymbol{S}) = \left| \frac{s/0.5 + 0.05}{s + 0.7} \right|$$

(krivulja prikazane kombinacijom isprekidanih linija i tačaka na prethodnoj slici, **NP** je OK).

- Budući da je $w_{\mathrm{I}} \boldsymbol{T}_I = w_I T$ skalarna matrica identiteta, imamo neovisno o strukturi $\boldsymbol{\Delta}_I$:

$$\mu_{\Delta_I}(w_I \boldsymbol{T}_I) = |w_I t| = \left| 0.2 \frac{5s+1}{(0.5s+1)(1.43s+1)} \right|$$

i sa prethodne slike slijedi da je **RS** OK.

- **RP**. Slaba.

μ-sinteza i DK-iteracija

- Strukturirana singularna vrijednost μ predstavlja veoma efikasan alat za analizu RP sa zadanim regulatorom.
- Traži se regulator $\boldsymbol{K}$ koji minimizira zadani μ uvjet - problem **μ-sinteze** $(\min_{\boldsymbol{K}}\mu(\boldsymbol{N}))$.
- Trenutno nema direktne metode za sintezu μ optimalnog regulatora.
- Za kompleksne perturbacije postoji metoda poznata pod imenom **DK-iteracija**.
- DK-iteracija kombinira H_∞ sintezu i μ analizu, te često daje veoma dobre rezultate.
- Polazna tačka je gornja granica na μ izražena preko skalirane singularne vrijednosti: $\boxed{\mu(\boldsymbol{N}) \leq \min_{\boldsymbol{D}\in\mathfrak{I}} \bar{\sigma}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}^{-1})}$

μ-sinteza i DK-iteracija

- Strukturirana singularna vrijednost μ za kompleksne perturbacije je ograničena sa:

$$\boxed{\rho(\boldsymbol{M}) \le \mu(\boldsymbol{M}) \le \bar{\sigma}(\boldsymbol{M})}$$

gdje:

$$\boldsymbol{\Delta} = \delta \boldsymbol{I} \;\; (\delta \text{ je kompleksan skalar}) : \mu(\boldsymbol{M}) = \rho(\boldsymbol{M})$$

$$\boldsymbol{\Delta} \text{ je puna kompleksna matrica} : \mu(\boldsymbol{M}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{M})$$

- Ako se promatra matrica $\boldsymbol{D}$ koja je u vezi s matricom $\boldsymbol{\Delta}$, to jest $\boldsymbol{\Delta D} = \boldsymbol{D\Delta}$, tada je:

$$\boxed{\mu(\boldsymbol{DM}) = \mu(\boldsymbol{MD}) \text{ i } \mu(\boldsymbol{DMD}^{-1}) = \mu(\boldsymbol{M})}$$

- Problem konveksne optimizacije po $\boldsymbol{D}$ (postoji samo jedan globalni minimum):

$$\boxed{\mu(\boldsymbol{D}) \le \min_{\boldsymbol{D} \in \Im} \bar{\sigma}(\boldsymbol{DMD}^{-1})}$$

μ-sinteza i DK-iteracija

- **Glavna ideja μ-sinteze i DK-iteracije je pronaći regulator koji će minimizirati vršnu vrijednost na frekvencijskom opsegu navedene gornje granice:**

$$\boxed{\min_{K}\left(\min_{D\in\Im}\left\|DN(K)D^{-1}\right\|_{\infty}\right)}$$

s obzirom na K ili D.

- Za startanje iteracija potrebno je prvo odabrati inicijalnu racionalnu funkciju prijenosa $D(s)$ odgovarajuće strukture – često je dobar izbor jedinična matrica.
- Algoritam DK-iteracije objašnjen je na sljedećem slajdu.

μ-sinteza i DK-iteracija

DK-iteracija

1. K-korak. Sinteza H_∞ regulatora za skalirani problem,

$$\boxed{\min_K \left\| \boldsymbol{D}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{D}^{-1} \right\|_\infty}$$

   za fiksni $\boldsymbol{D}(s)$.

2. D-korak. Naći $\boldsymbol{D}(j\omega)$ za minimizaciju $\bar{\sigma}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}^{-1}(j\omega))$ na svim frekvencijama sa fiksnim $\boldsymbol{N}$.

3. Podesiti amplitudu svakog elementa od $\boldsymbol{D}(j\omega)$ da bi se postigla stabilna i minimalno fazna funkcija prijenosa $\boldsymbol{D}(s)$ i ići ponovo na korak 1.

- Iteracija se može nastaviti dok se ne postigne zadovoljavajuća performansa, $\left\| \boldsymbol{D}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{D}^{-1} \right\|_\infty < 1$, ili dok se H_∞ norma dugo vremena ne smanjuje.

μ-sinteza i DK-iteracija

- **Primjer 6**. **μ-sinteza sa DK-iteracijom**. Zadan je pojednostavljen destilacijski proces:

$$\boldsymbol{G}(s)=\frac{1}{75s+1}\begin{bmatrix}87.8 & -86.4\\ 108.2 & -109.6\end{bmatrix}$$

- Težina neizvjesnosti $w_I\boldsymbol{I}$ i težina performansi $w_P\boldsymbol{I}$ dane se sljedećim izrazima:

$$w_I(s)=\frac{s+0.2}{0.5s+a};\quad w_P(s)=\frac{s/2+0.05}{s}$$

- Cilj je minimizirati vršnu vrijednost od $\mu_{\hat{\Delta}}(\boldsymbol{N})$, gdje je ***N*** dan sa:

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}w_I\boldsymbol{T}_I & w_I\boldsymbol{KS}\\ w_P\boldsymbol{SG} & w_P\boldsymbol{S}\end{bmatrix}$$

μ-sinteza i DK-iteracija

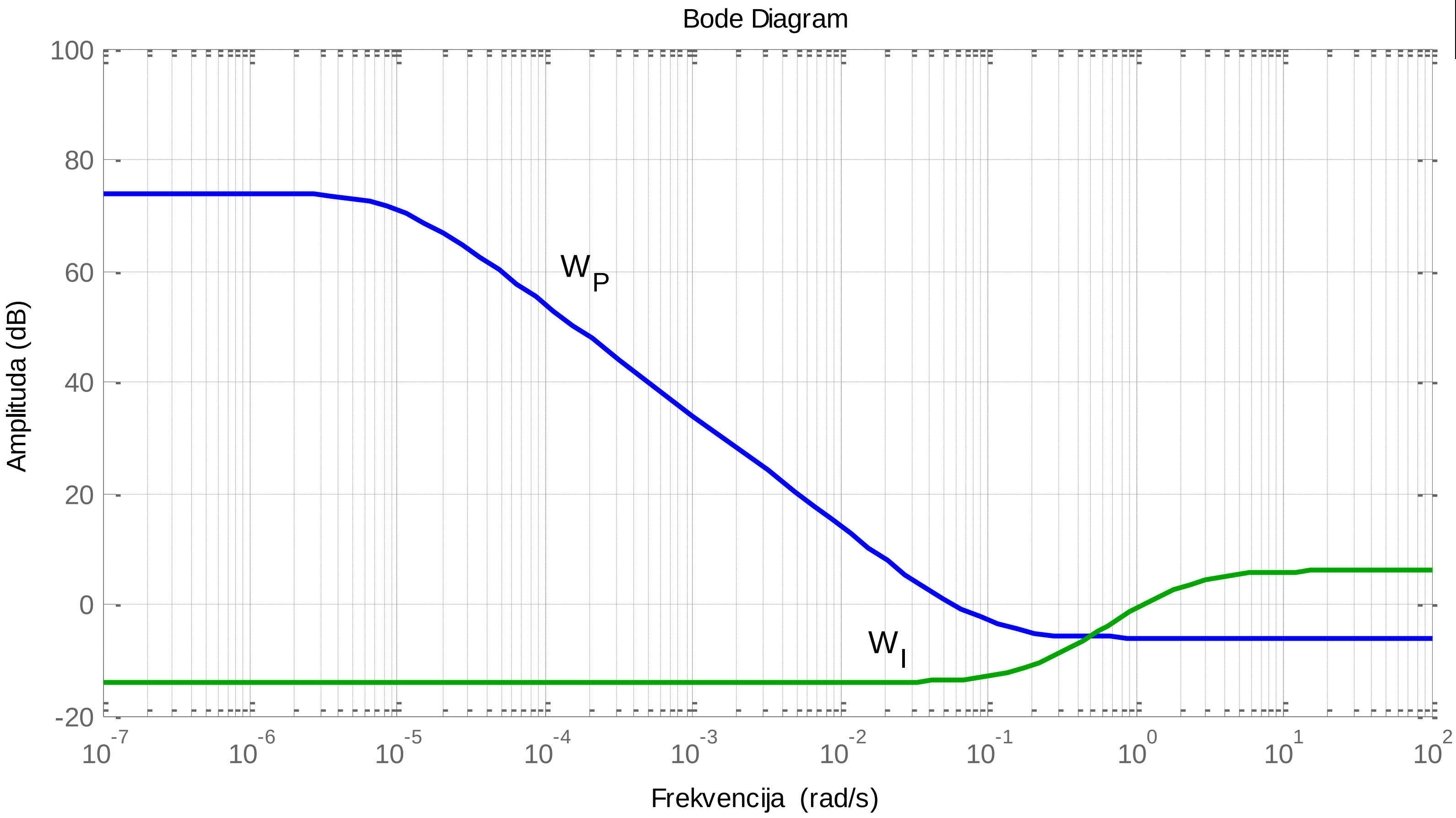
- Matrica $\hat{\Delta} = \mathrm{diag}\{\Delta_I, \Delta_P\}$.
- U primjeru se razmatra dijagonalna ulazna neizvjesnost (koja je uvijek prisutna u bilo kojem realnom problemu), tako da je Δ_I dijagonalna matrica dimenzija (2 x 2).
- Matrica Δ_P je puna matrica dimenzija (2 x 2) i predstavlja specifikacije performansi.
- Ovdje imamo samo tri bloka matrice kompleksnih neizvjesnosti, tako da je $\mu(\boldsymbol{N})$ jednaka gornjoj granici:

$$\min_{\boldsymbol{D}} \bar{\sigma}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}^{-1})$$

u ovom slučaju.

μ-sinteza i DK-iteracija

- Odzivi težina neizvjesnosti i performansi



- U odzivu postoji frekvencijsko područje (otvor) u kome obje težine imaju amplitudu manju od jedinice.

μ-sinteza i DK-iteracija

- Prvo se konstruira generalizirani proces $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{W}_I \\ \boldsymbol{W}_P\boldsymbol{G} & \boldsymbol{W}_P & \boldsymbol{W}_P\boldsymbol{G} \\ -\boldsymbol{G} & -\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{G} \end{bmatrix}$$

- Nakon toga se definira blokovska struktura koja se sastoji od: (1×1) blokova za prikaz $\boldsymbol{\Delta}_I$ i (2×2) blokova za prikaz $\boldsymbol{\Delta}_P$.
- Matrica skaliranja $\boldsymbol{D}$ za $\boldsymbol{DND}^{-1}$ ima oblik $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, d_3\boldsymbol{I}_2\}$, gdje je $\boldsymbol{I}_2$ jedinična matrica (2×2) i možemo postaviti $d_3 = 1$.
- Zatim se matrica $\boldsymbol{P}$ skalira sa $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{D}, \boldsymbol{I}_2\}$, gdje je matrica $\boldsymbol{I}_2$ povezana sa ulazima i izlazima regulatora.

μ-sinteza i DK-iteracija

Iteracija 1.

- **Korak 1.** Sa inicijalnim skaliranjem, $\boldsymbol{D}^0 = \boldsymbol{I}$, H_∞ algoritam generira regulator sa 6 stanja (2 stanja iz modela procesa, 2 stanja iz svake od težina) sa H_∞ od $\gamma = 1.1823$.
- **Korak 2.** Gornja μ-granica daje μ-krivulju prikazanu na prvoj sljedećoj slici i označenu sa "Iter. 1", kojoj odgovara vršna vrijednost $\mu = 1.1818$.
- **Korak 3.** Frekvencijski ovisni članovi $d_1(\omega)$ i $d_2(\omega)$ ugađaju se funkcijama prijenosa 4-tog reda.
- $d_1(\omega)$ i njegova ugađana (fitovana) funkcija prijenosa predočene su na drugoj slici i označene sa "Iter. 1" (tačkasta krivulja na drugoj slici predstavlja ugađanu funkciju).

μ-sinteza i DK-iteracija

Iteracija 2. **Korak 1.** Sa 8 stanja skalirajuće matrice $\boldsymbol{D}^1(s)$, H_∞ algoritam generira regulator sa 22 stanja i normom $\left\|\boldsymbol{D}^1\boldsymbol{N}(\boldsymbol{D}^1)^{-1}\right\|_\infty = 1.0238$

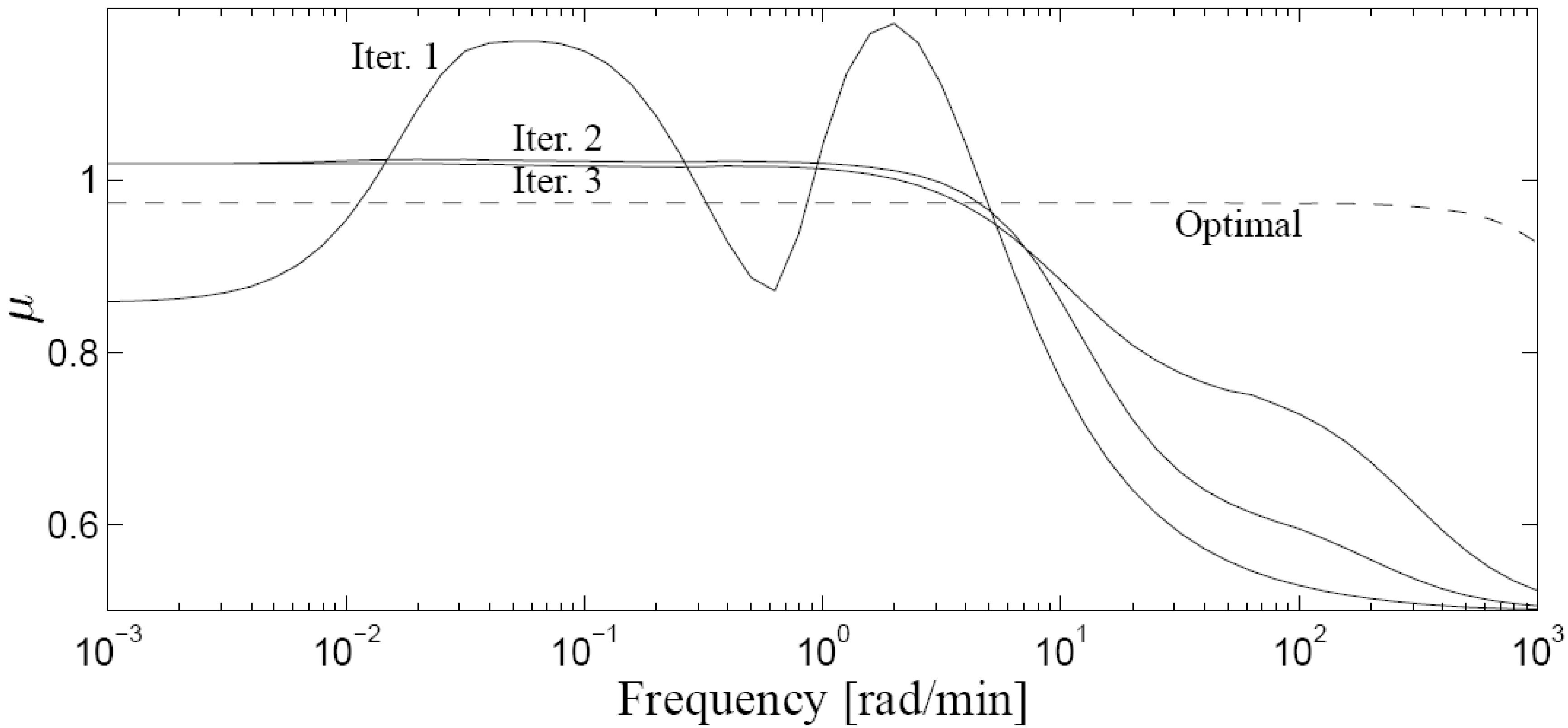
- **Korak 2.** Ovaj regulator daje vršnu vrijednost od μ jednaku 1.0238.
- **Korak 3.** Rezultantna skalirajuća matrica $\boldsymbol{D}^2$ se lagano mijenja u odnosu na prethodnu iteraciju, što se može vidjeti na drugoj slici označeno sa “Iter. 2”.

Iteracija 3. **Korak 1.** Sa skalirajućom matricom $\boldsymbol{D}^2(s)$, H_∞ norma se lagano mijenja sa 1.024 na 1.019. Budući da su poboljšanja u odnosu na prethodnu iteraciju mala i singularna vrijednost je veoma blizu jedinice, pa se zaustavljaju daljnje iteracije.

- Prema tome rezultantni regulator $\boldsymbol{K}_3$ ima 22 stanja sa vršnom vrijednošću od $\mu = 1.019$.

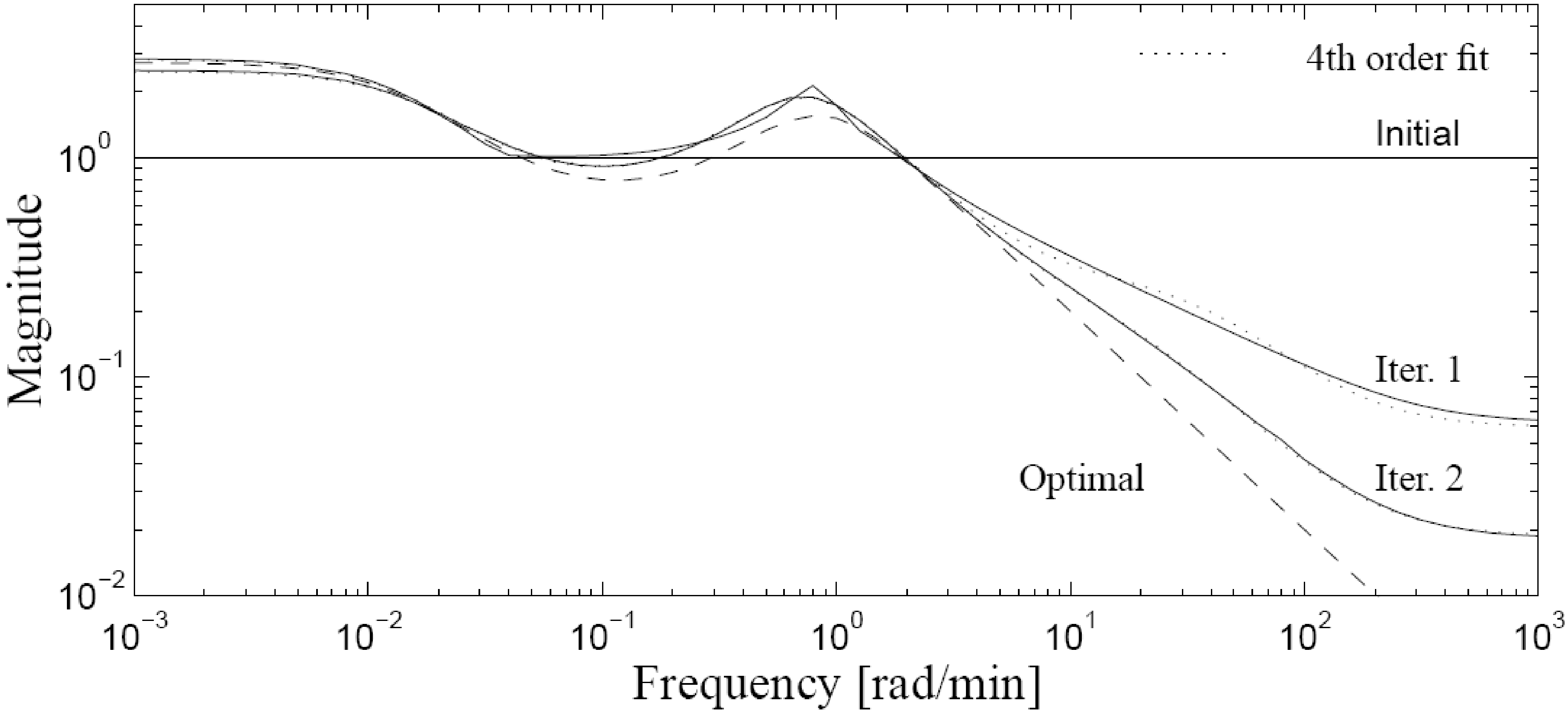
μ-sinteza i DK-iteracija

- **Promjena μ u *DK*-iteraciji**



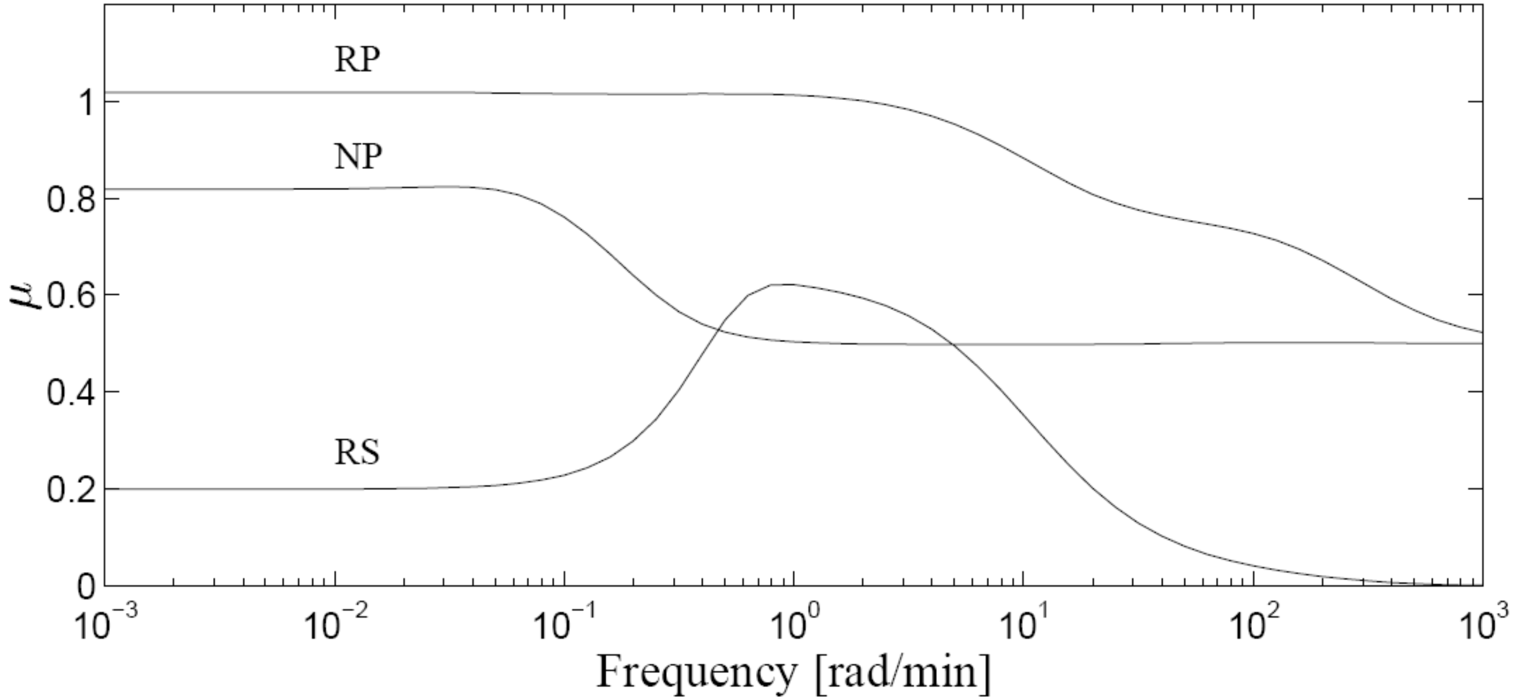
μ-sinteza i DK-iteracija

- **Promjena d_1 u *DK*-iteraciji**



μ-sinteza i DK-iteracija

- Finalne krivulje μ za NP, RS i RP sa regulatorom $\boldsymbol{K}_3$ prikazane su ne sljedećoj slici.



- Ciljevi postavljeni na NP i RS su jednostavno zadovoljeni. Vršna vrijednost $\mu = 1.019$ je veoma blizu 1, tako da su specifikacije performansi $\bar{\sigma}(w_P \boldsymbol{SP}) < 1$ gotovo zadovoljene za sve moguće procese.